

МРНТИ: 29.05.41; 41.29.25

О.В. Разина<sup>1</sup>, П.Ю. Цыба<sup>1</sup>, Н.Т. Суйкимбаева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ТОО "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics", Нур-Султан, Қазақстан

<sup>2</sup> Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, Тараз, Қазақстан  
(E-mail: olvikraz@mail.ru, pyotrtsyba@gmail.com, nurgul-1708@mail.ru)

### Космографический анализ $f(R)$ гравитации в модели типа Старобинского<sup>1</sup>

**Аннотация:** в данной статье мы исследовали инфляцию в рамках медленного скатывания на примере модели  $f(R)$  гравитации. Выбрав минимальную связь между материей и гравитацией, получили параметры медленного скатывания, скалярный спектральный индекс  $n_S$ , тензорный спектральный индекс  $n_T$  и тензорно-скалярное отношение  $r_*$ . Построив их графики, пришли к выводу, что предсказания модели Старобинского хорошо согласуются с последним измерением Планка, но допускают широкий диапазон допустимых значений для  $r_*$  и  $n_S$ . Показали, как можно связать космографические параметры - параметры замедления  $q$ , рывка  $j$ , щелчка  $s$  и треска  $l$  с современными значениями масштабного фактора. Нашли их значения в случае степенной эволюции масштабного фактора. Полученный анализ дает возможность связать независимые от модели результаты, полученные из космографии, с теоретически обоснованными предположениями  $f(R)$  гравитации.

**Ключевые слова:**  $f(R)$  гравитация, инфляция, параметры медленного скатывания, спектральные индексы, параметр Хаббла, космографические параметры.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-6836-2021-136-3-17-24>

Поступила: 16.08.2021 / Допущена к опубликованию: 10.09.2021

**Введение.** Стандартные свечи, такие как SNeIa, являются идеальными инструментами в современной космологии, поскольку они позволяют восстановить диаграмму Хаббла, то есть расстояние вплоть до высоких значений красного смещения. В таком случае обычно принимают параметризованную модель (например, такую как соответствие  $\Lambda$ CDM или любой другой сценарий темной энергии) и сравнивают ее с исследуемыми, чтобы проверить их реалистичность и ограничить ее характерные параметры. Всегда остаются некоторые сомнения в обоснованности ограничений на производные величины, такие как современные значения параметра замедления и возраста Вселенной. Чтобы преодолеть такую проблему, можно прибегнуть к космографии, т.е. к разложению масштабного фактора в ряд Тейлора по космическому времени [1]-[2]. Такое расширение приводит к соотношению расстояния и красного смещения и позволяет исследовать модель без конкретной формы решения уравнений движения. Большой набор наблюдательных данных последовательно указывает на то, что пространственно-плоская Вселенная претерпевает ускоренное расширение, вызванное доминированием вещества с отрицательным давлением, обычно называемым темной энергией [3].

Для решения загадки темной энергии существует широкий спектр противоположных предположений, подтверждающихся наблюдательными данными хорошего качества. Простейшим объяснением темной энергии является космологическая постоянная  $\Lambda$  [4]-[5], которая является лучшей со статистической точки зрения [6]-[8]. Но из-за проблемы совпадения космологическая постоянная  $\Lambda$  является с теоретической точки зрения довольно

<sup>1</sup> Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан AP09261147

непривлекательным решением. Для того чтобы избежать проблемы совпадений, по аналогии с инфляцией, было предложено скалярное поле  $\phi$ , получившее название квинтэссенции [9]-[10].

В настоящее время предложено множество альтернативных моделей, каждая из которых разделяет главное свойство - согласовываться с наблюдениями, но опирается на совершенно иную физику. Несмотря на различия, все теории, основанные на темной энергии, предполагают, что наблюдаемое ускорение является результатом действия до сих пор не обнаруженного ингредиента, добавляемого к космическому балансу.

Современные данные слишком ограничены, чтобы эффективно различать конкурирующие модели  $f(R)$  гравитации, но стратегия, направленная на очень точное определение космографических параметров, может предложить строгие ограничения на гравитацию более высокого порядка без необходимости решения уравнений поля или решения сложных задач, связанных с ростом возмущений. Космографический подход сегодня является инструментом наблюдений для исследования новых достижений космологии.

**Модель модифицированной гравитации.** Рассмотрим действие для модели  $f(R)$  гравитации со скалярным полем

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( f(R) + 2L_m^{(\phi)} \right), \quad (1)$$

где  $f(R)$  - некоторая функция скалярной кривизны,  $L_m^{(\phi)}$  - лагранжиан скалярного поля.

Действие (1) исследуем совместно со Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ), метрика для которой в сферических координатах имеет вид [11]

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 dr^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right), \quad (2)$$

где  $a(t)$  есть безразмерная функция времени известная как масштабный фактор, и  $k$  это Гауссова кривизна пространства и метрики ( $k > 0$  для закрытой Вселенной,  $k < 0$  для открытой Вселенной,  $k = 0$  для плоской Вселенной). Мы исследуем случай плоской Вселенной с  $k = 0$ .

Лагранжиан исследуемой модели равен

$$L = fa^3 - f_R Ra^3 + 6f_R \ddot{a}a^2 + 6f_R \dot{a}^2 a + 2a^3 L_m^{(\phi)}. \quad (3)$$

Уравнения движения можно получить с помощью уравнений Эйлера-Лагранжа если в лагранжиане содержится только первая производная по составляющим его функциям, поэтому понизим степень производной у масштабного фактора и произведем замену

$$L = -6f_{RR} \dot{R} \dot{a}^2 - f_R Ra^3 - 6f_R \dot{a}^2 a + fa^3 + 2a^3 L_m^{(\phi)}. \quad (4)$$

Полную систему уравнений движения найдем с помощью уравнений Эйлера-Лагранжа, подставив в них лагранжиан (4)

Уравнения Фридмана

$$3H^2 = \rho, \quad (5)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -p. \quad (6)$$

Уравнение Клейн-Гордона

$$L_m^{(\phi)} \ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a} L_m^{(\phi)} \dot{\phi} + L_m^{(\phi)} \dot{\phi} - L_m^{(\phi)} \phi = 0. \quad (7)$$

Уравнение сохранения, являющееся следствием уравнений Фридмана

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (8)$$

где

$$\rho = \frac{1}{f_R} \left( -3f_{RR}\dot{R}H + \frac{1}{2}f_R R - \frac{1}{2}f - L_m^{(\phi)} \right), \quad (9)$$

$$p = \frac{1}{f_R} \left( f_{RRR}\dot{R}^2 + f_{RR}\ddot{R} + 2f_{RR}\dot{R}H - \frac{1}{2}f_R R + \frac{1}{2}f + L_m^{(\phi)} \right). \quad (10)$$

Далее найдем решение полученной системы уравнений движения, задав функцию  $f(R)$  в виде функции Старобинского  $f(R) = \frac{R^2}{6}$  и лагранжиан скалярного поля  $\mathcal{L}_m^{(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ . Для заданных значений система (5)-(10) примет вид

$$3H^2 = \rho, \quad (11)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -p, \quad (12)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (13)$$

где

$$\rho = \frac{3}{R} \left( -\dot{R}H + \frac{1}{12}R^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right), \quad (14)$$

$$p = \frac{3}{R} \left( \frac{1}{3}\ddot{R} + \frac{2}{3}\dot{R}H - \frac{1}{12}R^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \right). \quad (15)$$

**Параметры медленного скатывания и спектральные индексы.** Первый параметр медленного скатывания Хаббла, обозначаемый как  $\epsilon_H$ , можно найти по формуле [11]-[12]

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}, \quad (16)$$

где для возникновения инфляции необходимо  $|\epsilon_H| \ll 1$ . Первый порядок похожего параметра медленного скатывания, обозначаемого как  $\epsilon_V$ , который зависит только от потенциала  $V(\phi)$  равен

$$\epsilon_H \approx \frac{3\dot{\phi}^2}{2V(\phi)} = \frac{1}{2k} \left( \frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \equiv \epsilon_V. \quad (17)$$

Второй параметр медленного скатывания Хаббла, обозначаемый как  $\eta_H$ , гарантирует медленное изменение  $\epsilon_H$ , во времени

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_H &= 2\frac{\dot{H}^2}{H^3} - \frac{\ddot{H}}{H^2} = 2H\epsilon_H(\epsilon_H - \eta_H), \\ \eta_H &\equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогичным образом в случае  $\epsilon_V$  мы можем обнаружить  $\eta_V$ , который зависит только от потенциала. Используя (16) и уравнения Фридмана, получим

$$\eta_V = \eta_H + \epsilon_H. \quad (19)$$

Эти параметры медленного скатывания описывают динамику инфляции и наблюдаемые особенности разных моделей. Для лучшего описания динамики инфляции применяют следующие спектральные индексы в терминах параметров медленного скатывания

$$n_S - 1 = -4\epsilon_H + 2\eta_H \approx -6\epsilon_V + 2\eta_V, \quad (20)$$

$$n_T = -2\epsilon_H \approx -2\epsilon_V, \quad (21)$$

$$r_* = 16\epsilon_H \approx 16\epsilon_V, \quad (22)$$

где  $n_S$  это скалярный спектральный индекс,  $n_T$  это тензорный спектральный индекс и  $r_*$  это тензорно-скалярное отношение.

Согласно данным Planck, значения скалярного спектрального индекса  $n_S$  и границы значения тензорно-скалярного отношения  $r_*$  задаются выражением [13]

$$\begin{aligned} n_S &= 0.9649 \pm 0.0042, \text{ (при 68\% CL)} \\ r_{0.002} &< 0.056. \text{ (при 95\% CL)} \end{aligned} \quad (23)$$

**Поиск решения.** Рассмотрим пример степенной функции масштабного фактора

$$a = a_0 t^\alpha, \quad (24)$$

где  $a_0$  некоторая константа и для ускоренного расширения Вселенной необходимо, чтобы выполнялось условие  $\alpha > 1$ .

В этом случае система уравнений движения будет иметь следующее решение

$$\phi = -\frac{2\sqrt{3\alpha(2\alpha-1)}}{t} + \phi_0, \quad (25)$$

$$V = \frac{3\alpha(3\alpha-2)(2\alpha-1)}{t^4} + V_0, \quad (26)$$

где  $\phi_0$  и  $V_0$  константы интегрирования.

Параметры медленного скатывания найдем по формулам (16)-(18)

$$\epsilon_H = \frac{2}{\alpha}, \quad \eta_H = \frac{2}{\alpha}, \quad (27)$$

$$\epsilon_V = \frac{2}{\alpha - \frac{2}{3}}, \quad \eta_V = \frac{4}{\alpha}. \quad (28)$$

Далее найдем соответствующие им тензорный  $n_S$ , скалярный  $n_T$  спектральные индексы, а также тензорно-скалярное соотношение  $r_*$

$$n_S = 1 - \frac{4}{\alpha}, \quad (29)$$

$$n_T = -\frac{4}{\alpha}, \quad (30)$$

$$r_* = -\frac{4}{\alpha}. \quad (31)$$

На рисунке 1 показана зависимость спектральных индексов от параметра  $\alpha$  (точечная линия – тензорный спектральный индекс  $n_S$ , сплошная линия скалярный спектральный индекс  $n_T$ , пунктирная линия – тензорно-скалярное соотношение  $r_*$ ).

**Кинематика космологического расширения.** Космологический принцип позволяет построить метрику Вселенной и сравнить полученные результаты с космологическими наблюдениями. Эффективность космографии состоит в том, что она дает возможность проверить на соответствие любые космологические модели [14]. В этой статье мы исследуем модифицированную модель  $f(R)$  гравитации со скалярным полем, но модификация ОТО или введение новых компонентов изменяет зависимость масштабного фактора, но не влияет на соотношения между кинематическими характеристиками.

В настоящее время в наблюдательной космологии нет прямого доступа к полной истории масштабного фактора  $a(t)$  за весь период эволюции Вселенной. Но есть доступ к текущему значению масштабного фактора и его производным через параметр Хаббла, параметр замедления и т. д. Эту информацию мы можем использовать для анализа истории нашей современной Вселенной [15].

Для описания кинематики космологического расширения найдем расширенный набор параметров используя масштабный фактор (24).

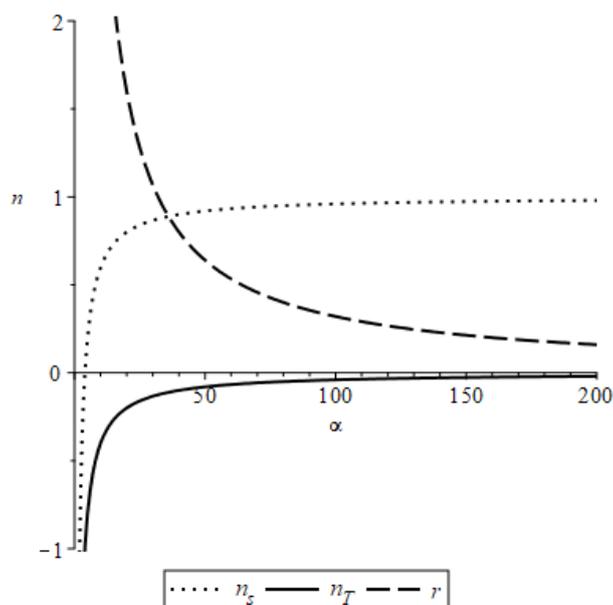


Рисунок 1 – Зависимость спектральных индексов от параметра  $\alpha$

Параметр Хаббла

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{\alpha}{t}. \quad (32)$$

Параметр замедления

$$q(t) = -\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^{-2} = -1 + \frac{1}{\alpha}. \quad (33)$$

Параметр рывка

$$j(t) = \frac{1}{a} \frac{d^3a}{dt^3} \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^{-3} = 1 - \frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}. \quad (34)$$

Параметр щелчка

$$s(t) = \frac{1}{a} \frac{d^4a}{dt^4} \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^{-4} = 1 - \frac{6}{\alpha} - \frac{7}{\alpha^2} - \frac{6}{\alpha^3}. \quad (35)$$

Параметр треска

$$l(t) = \frac{1}{a} \frac{d^5a}{dt^5} \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^{-5} = 1 - \frac{10}{\alpha} + \frac{35}{\alpha^2} - \frac{50}{\alpha^3} + \frac{24}{\alpha^4}. \quad (36)$$

Параметры замедления, рывка, щелчка, треска являются безразмерными.

На рисунке 2 показана зависимость космографических параметров от параметра  $\alpha$  (параметр замедления – точечная линия, параметр рывка – сплошная линия, параметр щелчка – пунктирная линия, параметр треска – штрихпунктирная линия).

**Заключение.** Недавний объем наблюдательных данных хорошего качества дал новый вклад в наблюдательную космологию. Новые и более точные данные привели к неожиданному открытию и доказательству современного космического ускорения. В результате появилось множество моделей и появилась необходимость создания новых критериев и параметров для их анализа. В этой статье мы исследовали модель  $f(R)$  гравитации, которая может соответствовать космологическим данным и обходить ограничения Солнечной системы в нескольких физически интересных случаях. Для степенной функции масштабного фактора получили параметры медленного скатывания и различные спектральные индексы в модели  $f(R)$  гравитации типа Старобинского. Исследуемые параметры соответствуют теории

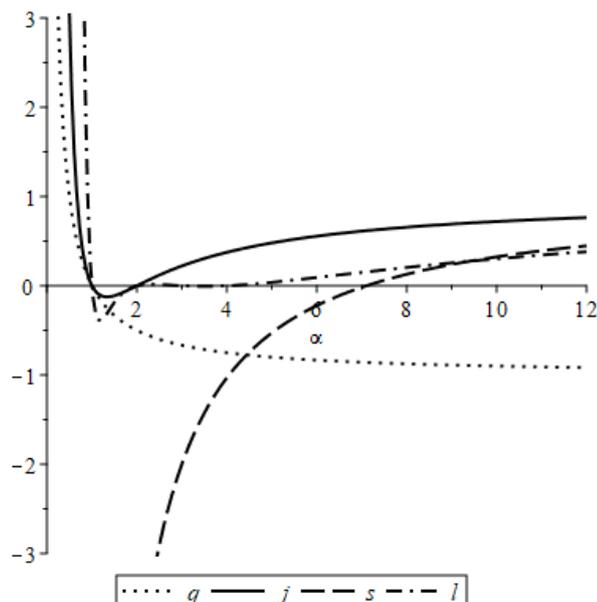


Рисунок 2 – Зависимость космографических параметров от параметра  $\alpha$ .

инфляции  $|\epsilon_H| \ll 1$  и данным Planck (23). Для описания эволюции Вселенной нашли пять космографических параметров, полученные результаты хорошо согласуются с набором наблюдательных данных. Космографические параметры – параметры замедления, рывка, щелчка и треска позволяют исследовать модель, без необходимости решения сложных уравнений движения поля четвертого порядка. Полученные нами космографические параметры для нашей модели соответствуют модели  $\Lambda$ CDM.

### Список литературы

- 1 Weinberg S. Gravitation and cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. – NY.: John Wiley & Sons, 1972. – 657 p.
- 2 Capozziello S., Cardone V.F., Salzano V. Cosmography of  $f(R)$  gravity // Physical Review D. – 2008. – Vol. 78. – P. 063504.
- 3 Copeland E.J., Sami M. and Tsujikawa S. Dynamics of dark energy // International Journal of Modern Physics D. – 2006. – Vol. 15. – № 11. – P. 1753-1935.
- 4 Carroll S.M., Press W.H., Turner E.L. The Cosmological Constant // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. – 1992. – Vol. 30. – P. 499-542.
- 5 Sahni V., Starobinski A. The Case for a Positive Cosmological Lambda-term // International Journal of Modern Physics D. – 2000. – Vol. 9. – P. 373-444.
- 6 Tegmark M. et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP // Physical Review D. – 2004. – Vol. 69. – P. 103501.
- 7 Seljak U. et al. Cosmological parameter analysis including SDSS Ly  $\alpha$  forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy // Physical Review D. – 2005. – Vol. 71. – P. 043511.
- 8 Tegmark M. et al. Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies // Physical Review D. – 2006. – Vol. 74. – P. 123507.
- 9 Peebles P.J.E., Rathra B. The cosmological constant and dark energy // Reviews of Modern Physics. – 2003. – Vol. 75. – P.559.
- 10 Padmanabhan T. Cosmological Constant - the Weight of the Vacuum // Physics Reports. – 2003. – Vol. 380. – P. 235-320.
- 11 Gamonal M. Slow-roll inflation in  $f(R, T)$  gravity and a modified Starobinsky-like inflationary model // Physics of the Dark Universe. – 2021. – Vol. 31. – P. 100768.

- 12 Razina O.V., Tsyba P.Yu., Myrzakulov R., Meirbekov B., Shanina Z. Cosmological Yang-Mills model with k-essence // Journal of Physics Conference Series. – 2019. – Vol. 1391. – P. 012164.  
 13 Akrami Y. et al. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation // Astronomy & Astrophysics. – 2020. – Vol. 641. – P.A10.  
 14 Болотин Ю.Л., Ерохин Д.А., Лемец О.А. Расширяющаяся Вселенная: замедление или ускорение? // Успехи физических наук. – 2012. – Т. 18. – № 9. – С. 941-986.  
 15 Visser M. Cosmography: Cosmology without the Einstein equations // General Relativity and Gravitation. – 2005. – Vol. 37. – P. 1541-1548.

О.В. Разина<sup>1</sup>, П.Ю. Цыба<sup>1</sup>, Н.Т. Суйкимбаева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ЖШС "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics", Нұр-Сұлтан, Қазақстан

<sup>2</sup> М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті, Тараз, Қазақстан

### Старобинский типті $f(R)$ гравитациялық моделінің космографиялық талдауы

**Аннотация.** Бұл мақалада біз  $f(R)$  гравитациялық моделін мысалға ала отырып, инфляцияны баяу сырғу тұрғысынан зерттедік. Материя мен гравитация арасындағы минималды байланысты таңдай отырып, біз баяу сырғу, скалярлық спектрлік индекс  $n_S$ , тензор спектрлік индекс  $n_T$  және тензор-скалярлық қатынасы  $r_*$  параметрлерін алдық. Олардың графиктерін құрастыра отырып, біз Старобинский моделінің болжамдары Планктің соңғы өлшемімен сәйкес келеді, бірақ  $r_*$  және  $n_T$  үшін қолайлы мәндердің кең ауқымына мүмкіндік береді деген қорытындыға келдік. Олар космографиялық параметрлер - баяулау  $q$ , серпіліс  $j$ , шерту  $s$  және шытынау  $l$  параметрлері шкалалық коэффициенттің қазіргі мәндерімен қалай байланысты болатынын көрсеттік. Олар масштабты фактордың дәрежелік эволюциясы жағдайында болатын мәндерін таптық. Алынған талдау космографиядан алынған модельге тәуелсіз нәтижелерді гравитацияның теориялық негізделген  $f(R)$  болжамдарымен байланыстыруға мүмкіндік береді.

**Түйін сөздер:**  $f(R)$  гравитация, инфляция, баяу сырғу параметрлері, спектрлік индекстер, Хаббл параметрі, космографиялық параметрлер.

O.V. Razina<sup>1</sup>, P.Yu. Tsyba<sup>1</sup>, N.T. Suikimbayeva<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LLP "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics", Nur-Sultan, Kazakhstan

<sup>2</sup> M.Kh.Dulaty Taraz Regional University, Taraz, Kazakhstan

### Cosmography analysis of $f(R)$ gravity in the model Starobinsky type

**Abstract.** The authors investigate cosmological inflation in slow roll framework for the  $f(R)$  gravity. The authors got slow roll parameters scalar spectral index  $n_S$ , tensor spectral index  $n_T$  and scalar-to-tensor ratio  $r_*$  for minimal coupling between matter and gravity. Having built their graphs, the authors concluded that the predictions of the Starobinsky model are in good agreement with the measurement of Planck, but allow a wide range of acceptable values for  $r_*$  and  $n_T$ . It is shown, that connection between cosmographic parameters – deceleration parameter  $q$ , jerk  $j$ , snap  $s$  and lerk  $l$  and modern values of the scale factor. The proposed analysis makes it possible to relate the model-independent results obtained from cosmography with theoretically substantiated assumptions of  $f(R)$  gravity.

**Keywords:**  $f(R)$  gravity, inflation, slow-roll parameters, spectral indices, Hubble parameter, cosmographic parameters.

## References

- Weinberg S. Gravitation and cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity (New York: John Wiley & Sons, 1972, 657 p.).
- Capozziello S., Cardone V.F., Salzano V. Cosmography of  $f(R)$  gravity, Physical Review D, 78, 063504 (2008).
- Copeland E.J., Sami M. and Tsujikawa S. Dynamics of dark energy, International Journal of Modern Physics D, 15(11), 1753-1935 (2006).
- Carroll S.M., Press W.H., Turner E.L. The Cosmological Constant, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 30, 499-542 (1992).
- Sahni V., Starobinski A. The Case for a Positive Cosmological Lambda-term, International Journal of Modern Physics D, 9, 373-444 (2000).
- Tegmark M. et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP, Physical Review D, 69, 103501 (2004).
- Seljak U. et al. Cosmological parameter analysis including SDSS Ly  $\alpha$  forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy, Physical Review D, 71, 043511 (2005).
- Tegmark M. et al. Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies, Physical Review D, 74, 123507 (2006).
- Peebles P.J.E., Rathra B. The cosmological constant and dark energy, Reviews of Modern Physics, 75, 559 (2003).
- Padmanabhan T. Cosmological Constant - the Weight of the Vacuum, Physics Reports, 380, 235-320 (2003).
- Gamonal M. Slow-roll inflation in  $f(R, T)$  gravity and a modified Starobinsky-like inflationary model, Physics of the Dark Universe, 31, 100768 (2021).
- Razina O.V., Tsyba P.Yu., Myrzakulov R., Meirbekov B., Shanina Z. Cosmological Yang-Mills model with k-essence, Journal of Physics Conference Series, 1391, 012164 (2019).

- 13 Akrami Y. et al. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation, *Astronomy & Astrophysics*, 641, A10 (2020).
- 14 Bolotin YU.L., Yerokhin D.A., Lemets O.A. Rasshiryayushchayasya Vselennaya: zamedleniye ili uskoreniye? [Expanding Universe: Deceleration or Acceleration?], *Uspekhi fizicheskikh nauk [Advances in physical sciences]*, 18(9), 941-986 (2012). [in Russian]
- 15 Visser M. Cosmography: Cosmology without the Einstein equations, *General Relativity and Gravitation*, 37, 1541-1548 (2005).

**Сведения об авторах:**

*Разина О.В.* – **основной автор**, PhD, ассоциированный профессор, научный сотрудник ТОО "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics", Нур-Султан, Казахстан.

*Цыба П.Ю.* – PhD, и.о.доцента, научный сотрудник ТОО "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics", Нур-Султан, Казахстан.

*Суйкимбаева Н.Т.* – старший преподаватель, Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, Тараз, Казахстан.

*Razina O.V.* – **The main author**, PhD, associate professor, Senior Researcher of "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics" Nur-Sultan, Kazakhstan.

*Tsyba P.Yu.* – PhD, associate professor, Senior Researcher of "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics" Nur-Sultan, Kazakhstan.

*Suikimbayeva N.T.* – teacher, M.Kh.Dulaty Taraz Regional University, Taraz, Nur-Sultan, Kazakhstan.