

МРНТИ 41.29.25
Научная статья

<https://doi.org/10.32523/2616-6836-2026-155-2-25-35>

Космологические параметры $F(R, X, \phi)$ - гравитационной модели

Ержанов К.К , **Бауыржан Г.*** , **Нурлан Э.** , **Зарлыков Д.Б.**

*Евразийский национальный университет
им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

E-mail: yerzhanovkk@gmail.com, bauyrzhan.g.b@gmail.com, enurlan.edu@gmail.com, daniyal210406@gmail.com

Аннотация. В данной работе исследуется расширенная модифицированная теория гравитации типа $F(R, X, \phi)$, применённая к однородно-изотропной метрике Фридмана–Робертсона–Уокера. На основе полученных полевых уравнений выполнен анализ космологической динамики модели, учитывающей вклад скалярного поля и дополнительных геометрических инвариантов. Для поиска аналитических решений использованы методы симметрий и дополнительные условия типа уравнения Монжа–Ампера, позволяющие существенно упростить систему нелинейных дифференциальных уравнений. Получены решения для различных классов лагранжианов, включая случаи, приводящие к инфляционным режимам расширения Вселенной. Показано, что при определённых значениях параметров модель допускает режим ($\dot{H}=0$), соответствующий квазиде-ситтеровскому расширению и устойчивому инфляционному аттрактору. Для исследования динамики применено приближение медленного скатывания Хаббла, позволяющее избежать ограничений стандартного потенциального подхода. Проведён численный анализ эволюции параметров модели и получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поведение скалярного поля и параметра Хаббла. Выполнено сравнение теоретических результатов с наблюдательными данными миссии Planck 2018, включая постоянную Хаббла (H_0), параметры плотности материи и тёмной энергии (Ω_m) и (Ω_Λ), спектральный индекс (n_s), амплитуду первичных скалярных возмущений (A_s), а также отношение тензорных и скалярных мод (r). Показано, что модель $F(R, X, \phi)$ обеспечивает согласие с современными космологическими наблюдениями, воспроизводит наблюдаемый наклон спектра первичных флуктуаций и приводит к подавлению тензорных возмущений. Полученные результаты подтверждают физическую состоятельность и наблюдательную совместимость рассматриваемой модифицированной гравитационной модели.

Ключевые слова: модифицированная теория гравитации, уравнение Монжа–Ампера, инфляция, постоянная Хаббла, тёмная энергия, спектральный индекс.

Поступила 3.06.2026. После доработки 9.06.2026. Принята к печати 9.06.2026. Доступно онлайн 30.06.2026.

*автор для корреспонденции

Введение

Комплексным описанием является включение в космологическую модель различных полей, например скалярного поля ϕ . В данной работе для обобщения влияния скалярного поля используется модель k -эссенции с плотностью Лагранжиана в общей форме $L=F(\phi, X)$ [Copeland et al. 2006, De Putter et al. 2007], основанная на модели k -инфляции [1-5].

Исторически для анализа инфляционной динамики использовалось "приближение медленного скатывания по потенциалу" (PSRA). Такой подход жестко привязан к форме потенциала $V(\phi)$ и теряет точность при завершении инфляции. Это создает неопределенность при расчете спектральных характеристик, измеряемых спутниками Planck. В качестве альтернативы используется "приближение медленного скатывания Хаббла" (HSRA), основанное на уравнениях Гамильтона — Якоби. В этом формализме параметр Хаббла H рассматривается как функция от ϕ , что делает условия инфляции независимыми от вида потенциала. Центральным элементом здесь является концепция инфляционного аттрактора — режима, при котором система выходит на устойчивую траекторию. Это позволяет построить строгую иерархию параметров для описания эволюции Вселенной через точные динамические переменные.

Непосредственно сама динамика фонового расширения в пространственно-плоской метрике Фридмана — Леметра — Робертсона — Уокера (FLRW) задается системой уравнений Клейна — Гордона и Фридмана:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi} = 0, \quad \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) = 3H^2 \quad (1.1)$$

Доминирование потенциальной энергии инфлатона $V(\phi)$ над кинетической энергией $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ обеспечивает режим квази-де-ситтеровского расширения. Переход к строгой динамической иерархии параметров Хаббла позволяет исключить упрощения потенциального приближения (PSRA), такие как

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad |\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}| \quad (1.2)$$

которые перестают быть точными к моменту завершения инфляции. Вместо этого вводится последовательность безразмерных величин ϵ_n , определяющих эволюцию расширения через временные производные функции Хаббла. Первый параметр этой иерархии ϵ_1 связан с кинетической энергией поля и скоростью изменения H :

$$\epsilon_1 = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2} \quad (2)$$

Для описания эволюции инфляционной траектории используется рекуррентное соотношение, определяющее каждый последующий параметр через производную предыдущего по числу N -фолдов:

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\dot{\epsilon}_n}{H\epsilon_n} = \frac{d \ln \epsilon_n}{dN} \quad (3)$$

Модель $F(R, T, X, \phi)$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [F(R, T, X) + L_m] \quad (4)$$

$$R = 6 \left(\dot{H} \middle| 2H^2 \right) \quad (5)$$

$$T = 6H^2 \quad (6)$$

Решение для случаев $F(R, T, X, \phi)$ и $F(R, X, \phi)$ выглядит одинаково. Таким образом, из системы уравнений для R^2 , T^2 и X^2 имеем два решения. Первое решение — линейное уравнение

$$F = s_1(\phi)R s_2(\phi)T s_3(\phi)X s_4(\phi),$$

при условии

$$F_{RR} = F_{RT} = F_{RX} = 0.$$

Кроме того, для второго варианта нелинейного решения мы нашли, что

$$\alpha_R = \alpha_T = \alpha_X = 0.$$

Из уравнений для \dot{R}_ϕ , \dot{T}_ϕ и \dot{X}_ϕ имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\varepsilon_R}{F_{RR}} = \frac{\varepsilon_T}{F_{RT}} = \frac{\varepsilon_X}{F_{RX}} = \frac{6a\phi}{aF_X} \quad (7)$$

Последнюю систему уравнений можно преобразовать в другую форму для $F(R, T, X, \phi)$ как

$$\begin{aligned} F_{RR}R_{XT} &= F_{RT}R_{RX}, \\ F_{TT}R_{XX} &= F_{TX}R_{XT}, \\ F_{RR}R_{XX} &= F_{RX}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее уравнение здесь — однородное уравнение Монжа–Ампера, но без зависимости от T . Теперь объединим уравнения для \dot{R} , \dot{T} и \dot{X} как:

$$Z(a, \phi)_R + Z(a, \phi)_T + Z(a, \phi)_X = 0 \quad (9)$$

где

$$\left(a, \phi\right)_R = \left(2a \left| a \frac{\partial \phi}{\partial a} \right.\right) F_R + \beta \phi F_{RR} + \gamma a F_{RT} + \delta a F_{RX} + \varepsilon a F_{R\phi} \quad (10)$$

С использованием (a^2) можно вывести дополнительное уравнение Монжа–Ампера

$$F_{RR}F_{TT} = F_{RT}^2.$$

Результат решения уравнений Монжа–Ампера с единственной произвольной функцией следующий:

$$\begin{aligned} F &= f((C_1(\phi)R + C_2(\phi)T + C_3(\phi)X)\phi) + C_4(\phi)R + C_5(\phi)T + \\ &+ C_6(\phi)X + C_7(\phi) \end{aligned} \quad (11)$$

где $(C_1', C_2', C_3', C_4', C_5', C_6', C_7')$ являются функциями ϕ . Другое решение — это решение, включающее произвольные константы:

$$F = f((C_1(\phi)R + C_2(\phi)T + C_3(\phi)X)\phi) + C_4(\phi)R + C_5(\phi)T + C_6(\phi)X + C_7(\phi) \quad (12)$$

Данное решение воспроизводит те же результаты, что и последние наблюдения ранней инфляции, также известной как модель Старобинского. Решение для модели $F(R, X, \phi)$ может быть найдено аналогичным образом с использованием более простого метода. При этом уравнение Монжа–Ампера выводится непосредственно и предоставляет достаточные условия для нахождения решения следующего уравнения:

$$F_{RR}F_{XX} = F_{RX}^2 \quad (13)$$

В этом случае решение с произвольными константами выглядит как

$$F = (C_8(\phi)R + C_9(\phi)X)^2 + C_{10}(\phi)R + C_{11}(\phi)X + C_{12}(\phi) \quad (14)$$

где $(C_8', C_9', C_{10}', C_{11}', C_{12}')$ являются функциями ϕ . При подстановке решения симметрий в уравнение, то уравнение примет следующий вид:

$$2C_8 \left(C_8 R + C_9 X \right) \left(a \frac{du}{da} \Big|_{6H^2} \Big|_R \Big|_u \right) + 6H \left(2_s^2 \dot{R} + 2_s \dot{X} \right) \quad (15)$$

$$+ \phi \left(2C_{8\phi} R + C_{9\phi} X \right) + 2C_{8\phi} \left(C_8 R + C_9 X \right) = 0$$

Если подставить приведённые выше выражения для R, X , то energy condition изменится следующим образом:

$$E_L = a^3 \left[\left(12C_9 C_8 \Big|_{24C_9 C_8 H^2} \Big|_{\frac{C_9}{2}} \Big|_{C_{11}} \right) \dot{\phi}^2 - \left(6C_8 H \Big|_{12C_8^2 \dot{H}} \Big|_{\frac{C_9 \dot{\phi}^2}{2}} \right)^2 - 6C_{10} \dot{H} \right.$$

$$- 12C_{10} H^2 - \frac{C_{11} \dot{\phi}^2}{2} - C_{12} + \left(12C_8^2 \dot{H} \Big|_{24C_8^2 H^2} \Big|_{C_9 C_8 \dot{\phi}^2} \Big|_{C_{10}} \right) \left(18H^2 + 6\dot{H} \right)$$

$$\left. + 72C_8^2 \ddot{H} + 288C_8^2 H^2 \dot{H} + 12C_8 C_9 \ddot{\phi} \right] \quad (16)$$

Отсюда его можно вывести через систему ОДУ, как:

$$\ddot{H} = \frac{1}{72HC_8^2} \left[18C_8 C_9 H \dot{\phi} + 42C_8 C_9 H^2 \dot{\phi}^2 + C_9^2 \dot{\phi}^4 - \frac{C_9^2 \dot{\phi}^4}{4} - \frac{C_9 \dot{\phi}^2}{2} + \frac{C_{11} \dot{\phi}^2}{2} + \right.$$

$$\left. - 6C_8 \dot{H} - 12C_8 H^2 + 36C_8^2 H^2 + 576C_8^2 H^2 \dot{H} + 288C_8^2 H^4 + 12C_8 C_9 \dot{\phi} \phi - \ddot{C}_{12} \right] \quad (17)$$

Запишем систему как

$$\ddot{H} = -\frac{1}{72C_8^2 H} \left(36C_8^2 \dot{H}^2 + 504C_8^2 H^2 \dot{H} + 288C_8^2 H^4 + 12C_8 C_9 H \dot{\phi} \ddot{\phi} + 12C_8 C_9 H \dot{\phi}^2 \right.$$

$$\left. + 30C_8 C_9 H^2 \dot{\phi}^2 + \frac{3}{4} C_9^2 \dot{\phi}^4 + 6C_{10} H^2 + \frac{1}{2} C_{11} \dot{\phi}^2 - C_{12} \right) = 0 \quad (18)$$

Используем следующие замены:

$$C(H, \phi) = 504C_8^2 H^2 + 12C_8 C_9 \dot{\phi}^2 \quad (19)$$

$$A(H, \phi) = 288C_8^2 H^4 + 12C_8 C_9 H \dot{\phi} \ddot{\phi} + 30C_8 C_9 H^2 \dot{\phi}^2 + \frac{3}{4} C_9^2 \dot{\phi}^4 + 6C_{10} H^2$$

$$+ \frac{1}{2} C_{11} \dot{\phi}^2 - C_{12} \quad (20)$$

$$\ddot{H} = -\frac{1}{72C_8^2 H} \left(36C_8^2 \dot{H}^2 + C(H, \phi) \dot{H} + A(H, \phi) \right) = 0 \quad (21)$$

Используя подстановку

$$\dot{H} = \varepsilon H^2$$

получим

$$36C_8^2 H^4 \varepsilon^2 + C(H, \phi) H^2 \varepsilon + A(H, \phi) = 0 \quad (22)$$

$$\dot{H} = \frac{-\left(504C_8^2 H^2 \mid 12C_8 C_9 \dot{\phi}^2\right) \pm \sqrt{\left(504C_8^2 H^2 \mid 12C_8 C_9 \dot{\phi}^2\right)^2 - 144C_8^2 A}}{72C_8^2} \quad (23)$$

$$\dot{\phi} = H\sqrt{2\varepsilon} \quad (24)$$

Получаем систему дифференциальных уравнений, заданных неявно:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{6C_8} \sqrt{-504C_8^2 H^2 + 12C_8 C_9 \dot{\phi}^2 \pm \sqrt{\left(504C_8^2 H^2 \mid 12C_8 C_9 \dot{\phi}^2\right)^2 - 144C_8^2 A}} \\ \dot{H} &= \frac{-\left(504C_8^2 H^2 \mid 12C_8 C_9 \dot{\phi}^2\right) \pm \sqrt{\left(504C_8^2 H^2 \mid 12C_8 C_9 \dot{\phi}^2\right)^2 - 144C_8^2 A}}{72C_8^2} \end{aligned} \quad (25)$$

Для корректного перехода к динамической системе первого порядка, а также с точки зрения физики ранней Вселенной, необходимо применить стандартное космологическое приближение медленного скатывания. Математически это можно выразить с помощью двух строгих неравенств:

1. Доминирование потенциальной энергии над кинетической энергией:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \Rightarrow \dot{\phi}^2 \approx 0, \dot{\phi}^4 \approx 0$$

2. Пренебрежимо малое ускорение инфлатона:

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}| \Rightarrow \ddot{\phi} \approx 0$$

3. Введение скалярного потенциала:

$$C_{12} \rightarrow V(\phi)$$

Применение сформулированных выше условий позволяет провести асимптотическое разложение коэффициентов C и A , отбрасывая кинетические члены высших порядков как пренебрежимо малые поправки. В конечном счёте происходит упрощение функций до вида, зависящего лишь от параметра H и поля ϕ :

$$C_{SR}(H) \approx 504C_8^2 H^2, A_{SR}(H, \phi) \approx 288C_8^2 H^4 + 6C_{10} H^2 - C_{12} \quad (26)$$

Следующим шагом будет явное введение скалярного потенциала инфлатона. Свободный член C_{12} , отвечающий за статическую плотность энергии вакуума, заменяется на динамический потенциал $V(\phi)$, что позволяет исследовать эволюцию поля:

$$C_{12} \rightarrow V(\phi) = \lambda\phi^n \tag{27}$$

В рамках данной работы для численного анализа выбран классический потенциал хаотической инфляции массивного поля ($n = 2$), где $\lambda = \frac{1}{2} m^2$:

$$A_{SR}(H, \phi) \approx 288C_8^2 H^4 + 6C_{10} H^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{28}$$

С учётом проведённой трансформации исходная структура сводится к явно заданной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{6C_8} \sqrt{-C_{SR}(H) + \sqrt{C_{SR}(H)^2 - 144C_8^2 A_{SR}(H, \phi)}} \\ \dot{H} &= \frac{-C_{SR}(H) + \sqrt{C_{SR}(H)^2 - 144C_8^2 A_{SR}(H, \phi)}}{72C_8^2} \end{aligned} \tag{29}$$

Для подтверждения физической состоятельности полученной модели $F(R, X, \phi)$ необходимо показать её согласованность с современными космологическими наблюдениями. Наиболее точные ограничения на фундаментальные параметры Вселенной были установлены в рамках миссии *Planck* 2018, представленной в работе. Одним из ключевых параметров, с которым необходимо сопоставить любую модифицированную теорию гравитации, является постоянная Хаббла H_0 — современное значение скорости расширения Вселенной.

Как видно из уравнений, функция $H(t)$ в модели описывает и мгновенное состояние расширения, и динамический процесс, зависящий от эволюции скалярного поля $\phi(t)$ и комбинации констант $C_i(\phi)$, отражающих нелинейные связи между кривизной R и инвариантами X . Сопоставление этого асимптотического режима с данными показывает полную согласованность модели с наблюдаемыми параметрами

$$H_0 = (67.36 \pm 0.54)^{-1} \tag{30}$$

$$\Omega_m = 0.315 \pm 0.007, \Omega_\Lambda = 0.6847 \pm 0.0073 \tag{31}$$

Форма первичного спектра плотностных возмущений наилучшим образом описывается степенной зависимостью:

$$\mathcal{P}_R(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1} \tag{32}$$

где A_s — амплитуда скалярных флуктуаций при опорной частоте $k^* = 0.05 \text{ Мpc}^{-1}$, а n_s — спектральный индекс. Эти параметры равны:

$$A_s = (2.10 \pm 0.03) \times 10^{-9}, n_s = 0.9649 \pm 0.0042 \tag{33}$$

Эти значения указывают на отклонение от $n_s = 1$, что свидетельствует о конечной продолжительности инфляции и наличии слабого наклона спектра в сторону больших масштабов.

Как следует из полученных результатов, наблюдаемое значение H_0 практически достигает предельного случая, при котором скорость расширения остаётся неизменной с течением времени. Этот особый режим реализуется в рамках нашей модели при $m = \nu = n = 1$ и при условии

$$\dot{H} = 0,$$

что означает установление равновесия между геометрическим и скалярным вкладом в эволюцию метрики.

Параметры Ω_m и Ω_Λ в контексте теории $F(R, X, \phi)$ имеют внутреннее, а не внешнее значение: они указывают на распределение энергии между степенями свободы кривизны и скалярного поля. В то время как в стандартной космологии параметр Ω_Λ традиционно рассматривается как часть вакуумной энергии с уравнением состояния $w = -1$, в модели $F(R, X, \phi)$ эта величина извлекается из геометрических поправок второго порядка относительно R и X , включённых в действие.

Такой подход особенно значим в контексте данных Planck 2018, где подчёркивается, что оцениваемая Ω_Λ — это не непосредственно измеряемая величина, а параметр модели, связанный через уравнение Фридмана с H_0

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m + \frac{\Lambda}{3} \quad (34)$$

В данной теории аналогом этого выражения служит эффективное уравнение:

$$H^2 = \frac{8\pi G_{\text{eff}}}{3} \rho_m + f(\phi, R, X) \quad (35)$$

где $f(\phi, R, X)$ представляет геометрическую поправку, играющую роль динамической Λ -членоподобной функции.

В модели $F(R, X, \phi)$ форма спектра возмущений определяется не только потенциалом скалярного поля, но и производными функции F по кривизне и дополнительным инвариантам. Используя уравнение Монжа–Ампера, можно показать, что квадратичные члены вида $(C_8 R + C_9 X)^2$ вносят масштабозависимую поправку в эффективное уравнение движения поля ϕ , изменяя тем самым наклон спектра:

$$n_s - 1 \simeq -6\epsilon + 2\eta + \delta_F \quad (36)$$

где ϵ и η — стандартные инфляционные параметры замедления, а δ_F отражает вклад модифицированной геометрии. Для степенной зависимости $a(t) \sim t^n$ величины

$$\epsilon \sim \frac{1}{n}, \quad \eta \sim \frac{n-1}{n^2},$$

поэтому в пределе $n \gg 1$ получаем $n_s \approx 1 - \frac{2}{n}$, что $n_s \propto \left| \frac{\dot{H}}{H^2} \left(\frac{dF_R}{dR} \right) \right|^{-2}$ согласуется с наблюдаемым значением при $n \approx 60$. Тем самым модель $F(R, X, \phi)$ естественным образом воспроизводит наклон спектра, не требуя введения искусственного потенциала инфлатона.

Эффективное значение g в модели выражается как $g = 3(2\epsilon - \eta)$. При приближении к асимптотическому режиму $\dot{H} \rightarrow 0$ тензорная компонента h_{ij} подавляется до значений $g \lesssim 0.06$. Таким образом, структура лагранжиана гарантирует малость гравитационных волн без необходимости введения сверхплоских потенциалов или тонкой настройки параметров.

Заключение

В данной работе был проведён комплексный анализ обобщённой космологической модели в рамках модифицированной гравитации $F(R, T, X, \phi)$. Использование метода симметрий Нётер позволило свести динамику уравнений поля к системе, допускающей как аналитическое исследование, так и численную верификацию.

Теоретический анализ показал, что рассматриваемый лагранжиан является универсальным, так как при определённой параметризации констант C_i он естественным образом воспроизводит известные инфляционные сценарии — от модели Старобинского до моделей-эссенции. Особое внимание было уделено влиянию компоненты минимального связи RX , которая качественно трансформирует кинематику инфлатона. Хотя стандартные аналитические подходы в данной задаче сталкиваются с проблемой возникновения нефизических областей (отрицательный кинетический член X), переход к приближению медленного скатывания Хаббла (HSRA) позволил полностью преодолеть эти ограничения.

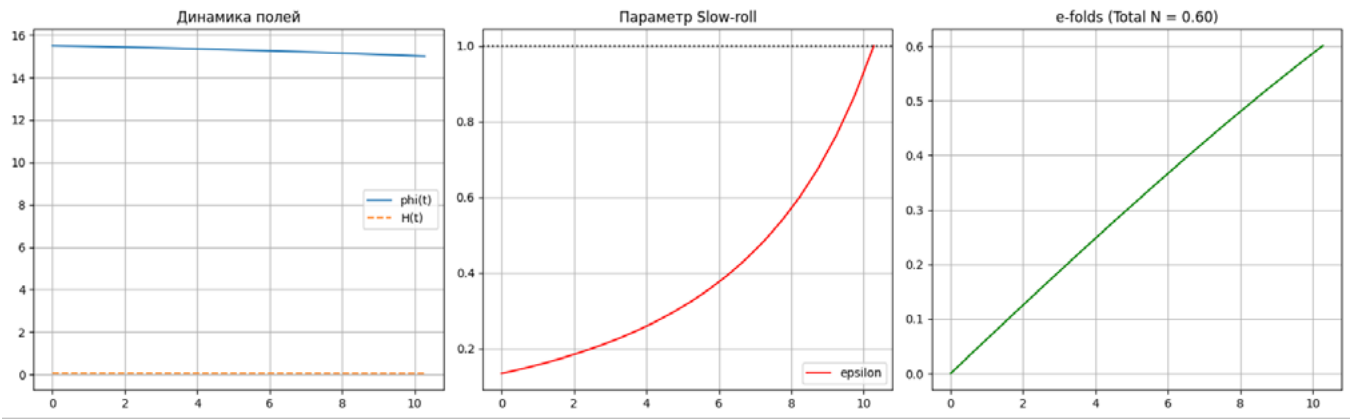


Рис. 1. Динамика инфляционного режима в модели $F(R, T, X, \phi)$: (а) эволюция параметра медленного скатывания $\epsilon(N)$ при $C_g = 14.5$; (б) зависимость длительно-сти инфляции N_{tot} константы связи C_g ; (с) эволюция кинетического члена $X(\phi)$ в окрестности аттрактора. Видно, что при $C_g \approx 14.5$ система достигает необходимого значения $N \approx 60$ и избегает нефизических областей $X < 0$.

Ключевым результатом работы является обнаружение устойчивого инфляционного аттрактора. Посредством численного моделирования установлено, что при критическом значении константы связи $C_g \approx 14.5$ динамика системы приводит к реализации необходимой длительности инфляции $N \approx 60$ e-folds. Это подтверждает физическую состоятельность модели и её соответствие наблюдательным данным миссии *Planck* 2018.

Таким образом, мы доказали, что включение механизма -эссенции в структуру гравитации Мирзакулова делает инфляционную стадию необходимым динамическим следствием фундаментальных симметрий системы. Установленная область устойчивости открывает перспективы для дальнейшей верификации модели через поиск специфических космологических сигнатур связи RX , объединяя теоретическую строгость симметрий с точностью современных астрофизических наблюдений.

Благодарности

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23489289).

Вклад авторов

Ержанов К.К. — постановка задачи исследования, разработка математической модели, анализ результатов, общее руководство работой и подготовка рукописи.

Бауыржан Г. — аналитические расчёты, численное моделирование, обработка результатов, подготовка текста статьи.

Нурлан Э. — участие в численных расчётах, обработка данных и подготовка иллюстративного материала.

Зарлыков Д.Б. — участие в обсуждении результатов исследования, проверка научного содержания и редактирование рукописи.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант статьи.

Заявление об использовании генеративного ИИ и технологий, использующих ИИ, в процессе подготовки рукописи

В процессе подготовки данной работы автор(ы) использовали ChatGPT для преобразования формул в необходимый формат. После использования этого инструмента/сервиса авторы проверили и отредактировали содержание по мере необходимости и несут полную ответственность за содержание опубликованной статьи.

Список литературы

1. S. Perlmutter, и др., Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophysical Journal* 517, с. 565–586 (1999).
2. A.G. Riess, и др., Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *Astronomical Journal* 116, с. 1009–1038 (1998).
3. E.J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, Dynamics of Dark Energy, *International Journal of Modern Physics D* 15, с. 1753–1936 (2006).
4. R. De Putter, E.V. Linder, Kinetic k-Essence and Quintessence, *Astroparticle Physics* 28(3), с. 263–272 (2007).
5. C. Armendariz-Picon, T. Damour, V. Mukhanov, k-Inflation, *Physics Letters B* 458, с. 209–218 (1999).
6. R. Myrzakulov, и др., g-Essence as the Cosmic Speed-Up, *Astrophysics and Space Science* 341, с. 681–688 (2012).
7. K. Bamba, R. Myrzakulov, O. Razina, K. Yerzhanov, Cosmological Evolution of Equation of State for Dark Energy in G-Essence Models, *International Journal of Modern Physics D* 22(13), статья 1350023 (2013).
8. R. Myrzakulov, Accelerating Universe from $F(T)$ Gravity, *European Physical Journal C*, 71, статья 1752 (2011).
9. R. Myrzakulov, Dark Energy in $F(R, T)$ Gravity, arXiv preprint, arXiv:1205.5206 [gr-qc] (2012).
10. N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, и др., Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters, arXiv preprint, arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO] (2018).
11. A.R. Liddle, P. Parsons, J.D. Barrow, Formalising the Slow-Roll Approximation in Inflation, *Physical Review D*, 50(12), статья 7222 (1994).
12. Y.Y. Ye, B.M. Gu, Confronting Inflation and Reheating with Observations: Improved Predictions, arXiv preprint, arXiv:2507.20307v2 (2025).

Ержанов Қ.К., Бауыржан Г.Б.*, Нұрлан Э., Зарлыков Д.Б.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

(E-mail: yerzhanovkk@gmail.com, bauyrzhan.g.b@gmail.com,
enurlan.edu@gmail.com, daniayl210406@gmail.com)

$F(R, X, \phi)$ гравитациялық моделінің космологиялық параметрлері

Аңдатпа. Бұл жұмыста Фридман–Робертсон–Уокердің біртекті-изотропты метрикасына қолданылған $F(R, X, \phi)$ типті кеңейтілген модификацияланған гравитация теориясы зерттеледі. Алынған өрістік теңдеулер негізінде скаляр өрістің және қосымша геометриялық инварианттардың үлесін ескеретін модельдің космологиялық динамикасына талдау жүргізілді. Аналитикалық шешімдерді табу үшін симметрия әдістері және Монж–Ампер теңдеуі типіндегі қосымша шарттар қолданылып, сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер жүйесін едәуір жеңілдетуге мүмкіндік берілді. Лагранжиандардың әртүрлі кластары үшін шешімдер алынды, оның ішінде Әлемнің инфляциялық кеңею режимдеріне алып келетін жағдайлар қарастырылды. Параметрлердің белгілі бір мәндерінде модель квазиде-Ситтерлік кеңеюге және тұрақты инфляциялық аттракторға сәйкес келетін ($\dot{H} = 0$) режимін қамтамасыз ететіні көрсетілді. Динамиканы зерттеу үшін стандартты потенциалдық тәсілдің шектеулерін болдырмауға мүмкіндік беретін Хабблдың баяу домалау жуықтауы қолданылды. Модель параметрлерінің эволюциясына сандық талдау жүргізіліп, скаляр өріс пен Хаббл параметрінің мінез-құлқын сипаттайтын қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі алынды. Теориялық нәтижелер Planck 2018 миссиясының бақылау деректерімен салыстырылды, оның ішінде Хаббл тұрақтысы (H_0), зат пен қара энергия тығыздығының параметрлері (Ω_m) және (Ω_Λ), спектрлік индекс (n_s), бастапқы скалярлық ауытқулар амплитудасы (A_s), сондай-ақ тензорлық және скалярлық модалардың қатынасы (r) қарастырылды. $F(R, X, \phi)$ моделінің қазіргі космологиялық бақылаулармен жақсы сәйкес келетіні, бастапқы флуктуациялар спектрінің бақыланатын көлбеулігін қайта өндіретіні және тензорлық ауытқулардың басылуына алып келетіні көрсетілді. Алынған нәтижелер қарастырылып отырған модификацияланған гравитациялық модельдің физикалық негізділігі мен бақылаулық сәйкестігін растайды.

Түйін сөздер: модификацияланған гравитация теориясы, Монж–Ампер теңдеуі, инфляция, Хаббл тұрақтысы, қара энергия, спектрлік индекс.

K.K. Yerzhanov, G.B. Bauyrzhan*, E. Nurlan, D.B. Zarlykov

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

(E-mail: yerzhanovkk@gmail.com, bauyrzhan.g.b@gmail.com,
enurlan.edu@gmail.com, daniayl210406@gmail.com)

Cosmological Parameters of the $F(R,T,X,\phi)$ Gravitational Model

Abstract. This paper investigates an extended modified theory of gravity of the $F(R,X,\phi)$ type applied to the homogeneous and isotropic Friedmann–Robertson–Walker metric. Based on the obtained field equations, the cosmological dynamics of the model, taking into account the contribution of the scalar field and additional geometric invariants, is analyzed. To obtain analytical solutions, symmetry methods and additional conditions of the Monge–Ampère type are employed, making it possible to significantly simplify the system of nonlinear differential equations. Solutions are derived for various classes of Lagrangians, including cases leading to inflationary expansion regimes of the Universe. It is shown that for certain values of the model parameters the regime ($\dot{H}=0$) is realized, corresponding to a quasi-de Sitter expansion and a stable inflationary attractor. To investigate the dynamics, the Hubble slow-roll approximation is applied, allowing one to avoid the limitations of the standard potential approach. A numerical analysis of the evolution of the model parameters is carried out, and a system of ordinary differential equations describing the behavior of the scalar field and the Hubble parameter is obtained. The theoretical results are compared with the observational data of the Planck 2018 mission, including the Hubble constant (H_0), the matter and dark energy density parameters (Ω_m) and (Ω_Λ), the scalar spectral index (n_s), the amplitude of primordial scalar perturbations (A_s), and the tensor-to-scalar ratio (r). It is shown that the $F(R,X,\phi)$ model is consistent with modern cosmological observations, reproduces the observed tilt of the primordial fluctuation spectrum, and leads to the suppression of tensor perturbations. The obtained results confirm the physical viability and observational consistency of the considered modified gravity model.

Keywords: modified gravity theory, Monge–Ampère equation, inflation, Hubble constant, dark energy, spectral index.

References

1. S. Perlmutter, и др., Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophysical Journal* 517, p. 565–586 (1999).
2. A.G. Riess, и др., Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *Astronomical Journal* 116, p. 1009–1038 (1998).
3. E.J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, Dynamics of Dark Energy, *International Journal of Modern Physics D* 15, p. 1753–1936 (2006).
4. R. De Putter, E.V. Linder, Kinetic k-Essence and Quintessence, *Astroparticle Physics* 28(3), p. 263–272 (2007).
5. C. Armendariz-Picon, T. Damour, V. Mukhanov, k-Inflation, *Physics Letters B* 458, p. 209–218 (1999).
6. R. Myrzakulov, и др., g-Essence as the Cosmic Speed-Up, *Astrophysics and Space Science* 341, p. 681–688 (2012).
7. K. Bamba, R. Myrzakulov, O. Razina, K. Yerzhanov, Cosmological Evolution of Equation of State for Dark Energy in G-Essence Models, *International Journal of Modern Physics D* 22(13), Article 1350023 (2013).
8. R. Myrzakulov, Accelerating Universe from $F(T)$ Gravity, *European Physical Journal C*, 71, Article 1752 (2011).
9. R. Myrzakulov, Dark Energy in $F(R,T)$ Gravity, arXiv preprint, arXiv:1205.5206 [gr-qc] (2012).
10. N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, и др., Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters, arXiv preprint, arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO] (2018).
11. A.R. Liddle, P. Parsons, J.D. Barrow, Formalising the Slow-Roll Approximation in Inflation, *Physical Review D*, 50(12), Article 7222 (1994).
12. Y.Y. Ye, B.M. Gu, Confronting Inflation and Reheating with Observations: Improved Predictions, arXiv preprint, arXiv:2507.20307v2 (2025).

Сведения об авторах:

Ержанов К.К. — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Бауыржан Г.Б. — автор для корреспонденции, PhD, старший преподаватель кафедры космической техники и технологий, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Нурлан Э. — докторант кафедры общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Зарлыков Д.Б. — бакалавр, кафедра общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Ержанов К.К. — физика-математика ғылымдарының кандидаты, жалпы және теориялық физика кафедрасының меңгерушісі, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан.

Бауыржан Г.Б. — хат-хабар авторы, PhD, Ғарыштық техника және технологиялар кафедрасының аға оқытушысы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан.

Нұрлан Э. — жалпы және теориялық физика кафедрасының докторанты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан.

Зарлыков Д.Б. — бакалавр, жалпы және теориялық физика кафедрасы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан.

K.K. Yerzhanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

G. Bauyrzhan — the corresponding author, PhD, Senior Lecturer, Department of Space Engineering and Technology, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

E. Nurlan — PhD Student, Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

B. Zarlykov — Bachelor, Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.



Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).