




IRSTI 41.29.25

<https://doi.org/10.32523/2616-6836-2026-154-1-18-36>

Scientific article

Минималды емес $f(R, T)$ гравитациясында баяулау параметрін дивергенциясыз параметрлеу және энергия шарттары

А.А. Жадыранова¹, Ү.Қ. Исмаил*¹, У.М. Сноу²,
В.Н. Жумабекова³, Н.К. Жусупова³

¹Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

²Индиана университеті, Блумингтон, Блумингтон, Америка Құрама Штаттары

³Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

(E-mail: a.a.zhadyranova@gmail.com, umitismail848@gmail.com, wsnow@iu.edu, zh.venera@mail.ru, zhnaz88@gmail.com)

Аңдатпа. Бұл жұмыста материя-геометрияның минималды емес байланысы бар $f(R, T)$ гравитациясының ең қарапайым сызықтық моделінде $f(R, T) = R + 2\lambda T$ баяулау параметрінің дивергенциясыз параметрленуін зерттейміз, мұнда R – Риччи скаляры, T - энергия-импульс тензорының ізі, λ - байланыс параметрі. Аталған параметрлену арқылы Хаббл параметрін қызыл ығысумен $H(z)$ түрінде шығарып, оны модификацияланған Фридман теңдеулеріне енгіземіз. Модель параметрлері ОНД (cosmic chronometers) және Pantheon суперновалар жинақтамасының деректерімен шектеліп, қазіргі мәндер үшін H_0 , q_0 және эволюциялық компонент q_1 сандық түрде бағаланады, нәтижелер Ғаламның баяулаудан үдеуге бірқалыпты өтетінін көрсетеді. Сонымен қатар, әртүрлі λ мәндерінде энергия тығыздығы ρ мен толық күй теңдеуі параметрінің ω уақыт бойынша өзгерісі талданып, Λ CDM моделінен ауытқулар және λ параметрінің ғаламдық динамиканы қалыптастырудағы рөлі айқындалады. Энергия шарттарын тексеру нәтижесінде NEC және DEC шарттары эволюция бойы орындалатыны, ал SEC шарты кеш уақыттарда бұзылатыны анықталады, бұл бақылаулық үдеумен үйлеседі. Жалпы алғанда, дивергенциясыз параметрлену $f(R, T)$ гравитациясы шеңберінде кеш уақыттағы космостық үдеуді түсіндіруге әрі бақылаулық және теориялық шектеулерді сақтауға мүмкіндік береді. Зерттеу нәтижелері стандартты Λ CDM моделімен салыстырмалы талдау жүргізуге және λ параметріне бақылаулық шектеулер қоюға негіз болады.

Түйін сөздер: Дивергенциясыз баяулау параметрі, $f(R, T)$ гравитациясы, минималды емес байланыс, космостық үдеу, энергия шарттары, күй теңдеуі, Λ CDM.

Introduction

Қазіргі бақылаулық космология бойынша Ғаламның кеңеюі кеш уақыттарда үдей түсетіні сенімді түрде анықталған. Бұл қорытынды ең алдымен Ia типті аса жаңа жұлдыздардың (SNe Ia) қашықтық-қызыл ығысу байланысынан алынған нәтижелермен Жіберілді 3.02.2026. Өзгертілді 19.02.2026. Қабылданды 19.02.2026. Онлайн қол жетімді 30.03.2026

дәлелденді [1,2]. Стандартты Λ CDM моделінде үдеу құбылысы космологиялық тұрақты немесе вакуумдық энергия арқылы түсіндіріледі. Дегенмен, мұндай түсіндірудің теориялық қиындықтары мен ашық сұрақтары балама тәсілдерді қарастыруға ынталандырады.

Балама бағыттардың маңызды класы – модификацияланған гравитация теориялары. Бұл тәсілде кеш уақыттағы үдеуді жаңа күңгірт энергия компонентін енгізбей-ақ, гравитациялық әсердің үлкен масштабтарда өзгеруі арқылы сипаттауға болады. Осындай теориялардың ішінде $f(R)$, $f(T)$, скаляр-тензорлық модельдер және олардың әртүрлі жалпыламалары кеңінен зерттелген. Алайда параметрлік еркіндігі көп модельдерде физикалық интерпретация күрделеніп, бақылаулық деректермен сәйкестігін нақты бағалау қиын болуы мүмкін. Сондықтан қарапайым әрі бақылаулық тұрғыдан тексеруге ыңғайлы, бірақ сонымен бірге жаңа физикалық эффектілер беретін модельдерге ерекше назар аударылады.

Осы тұрғыда $f(R,T)$ гравитациясы қызықты мүмкіндіктер береді, мұнда гравитациялық әсер кеңістік-уақыт қисықтығын сипаттайтын Риччи скаляры R -ге ғана емес, материяның энергия-импульс тензорының ізі T -ға да тәуелді болады [3,4]. Нәтижесінде материя мен геометрия арасында минималды емес байланыс пайда болып, космологиялық теңдеулерде тиімді қосымша мүшелер түзіледі. Бұл мүшелер Ғалам динамикасына, соның ішінде үдеу фазасының басталуына әсер етуі мүмкін. Сонымен қатар T -ға тәуелділік енгізілген кезде материя қасиеттері кеңею динамикасына тікелей әсер етеді, яғни модельдің эволюциясы материя күйіне сезімтал бола бастайды. Бұл ерекшелік бір жағынан үдеуді сипаттаудың қосымша механизмдерін ұсынса, екінші жағынан теорияның физикалық келісімділігі тұрғысынан қосымша талдауды талап етеді. Атап айтқанда, $f(R,T)$ теориясында энергия-импульс тензорының ковариантты сақталу заңы жалпы жағдайда өзгеруі мүмкін, бұл космологиялық сұйықтықтың эволюциялық теңдеуіне қосымша мүшелердің пайда болуына әкеледі. Сондықтан нақты есептеулер жүргізгенде материяның енгізілу тәсілі, күй теңдеуі және қолданылатын қосымша шарттар айқын көрсетілуі маңызды. Бұл жұмыста модельді физикалық тұрғыдан интерпретациялауға қолайлы шеңберде қарастырып, кеңею тарихын кинематикалық әдіс арқылы сипаттауды мақсат етеміз.

Бұл жұмыста $f(R,T)$ теориясының ең қарапайым сызықтық түрі қарастырылады: $f(R,T)=R+2\lambda T$, мұнда λ – материя-геометрия байланысын сипаттайтын параметр. Соңғы жылдары мұндай модель кеш уақыттағы үдеуді сипаттаудың және энергия шарттарын талдау тұрғысынан белсенді зерттелуде [5–7]. Ғалам кеңеюін кинематикалық түрде сипаттаудың ыңғайлы жолы ретінде баяулау параметрінің дивергенциясыз параметрленуі алынып, одан Хаббл параметрінің $H(z)$ түріндегі тәуелділігі аналитикалық түрде шығарылады. Алынған $H(z)$ модификацияланған Фридман теңдеулеріне енгізіліп, энергия тығыздығы $\rho(z)$, қысым $p(z)$ және тиімді күй теңдеуі параметрі $\omega(z)$ эволюциясы талданады. Мұндай схема параметрлердің физикалық рөлін айқын көрсетуге, әрі алынған нәтижелерді стандартты Λ CDM сценарийімен салыстыруға мүмкіндік береді.

Сонымен қатар алынған шешімдердің физикалық үйлесімділігін бағалау үшін классикалық энергия шарттары NEC, WEC, SEC, DEC қарастырылып, λ параметрінің

олардың орындалуына әсері талданады. Энергия шарттарының орындалу аймақтарын анықтау модельдің физикалық жарамды параметрлік облыстарын бөліп көрсетуге және кеңею динамикасының үдеу, баяулау режимдерін дұрыс интерпретациялауға негіз береді. Осылайша, жұмыс $f(R,T)$ гравитациясы аясында дивергенциясыз кинематикалық тәсілдің мүмкіндігін көрсетіп, модель параметрлерінің космологиялық динамикаға ықпалын жүйелі түрде зерттейді және алынған нәтижелерді Λ CDM болжамдарымен салыстыруға алғышарт жасайды.

Бұл жұмыста «дивергенциясыз баяулау параметрі» деп $q(z)$ баяулау параметрінің таңдалған параметрленуі қарастырылатын қызыл ығысу аралығында шекті болып, ешбір нүктеде шексіздікке кетпейтінін айтамыз. Бұл шарт $q(z)$ -пен байланысты $H(z)$ сияқты космологиялық функциялардың физикалық мағынасы бар регуляр эволюциясын қамтамасыз етеді.

Әдіснама

Бұл жұмыста материя мен геометрия арасындағы минималды емес байланысы бар $f(R,T)$ модификацияланған гравитация қарастырылады. Мұндай тәсілдің негізгі идеясы – гравитациялық әсер тек қана қисықтық скаляры R -ға тәуелді емес, сонымен бірге материяны сипаттайтын энергия – импульс тензорының ізі T -ға да тәуелді болады. Нәтижесінде өріс теңдеулерінде қосымша тиімді мүшелер пайда болып, олар космологиялық эволюцияға әсер етеді. Әсіресе T -ға тәуелділік материя-геометрия байланысын күшейтіп, стандартты жалпы салыстырмалылықпен салыстырғанда жаңа параметрлік еркіндік береді [3].

Есептеулерді ықшамдау үшін табиғи бірліктер жүйесін қолданамыз. Бұл жағдайда барлық шамалар бір жүйеге келтіріліп, теңдеулердің құрылымы айқын көрінеді. Әдіснаманың жалпы қадамы келесідей: әсер функционалын жазу, метрика бойынша вариациялау арқылы өріс теңдеулерін алу, материя бөлігінен энергия-импульс тензорын анықтау және оның ізі T -ны енгізу, кейінгі бөлімдерде осы теңдеулерді таңдаулы космологиялық метрикаға бейімдеп, алынған нәтижелерден баяулау параметрлері мен энергия шарттарын талдау.

$f(R,T)$ теориясын таңдаудың тағы бір мотивациясы – материя сипаттамаларының геометрияға тікелей кері байланыс беруі. Космологияда бұл байланыс әсіресе идеал сұйық түріндегі материя үшін маңызды, өйткені T шамасы ρ және p арқылы өрнектеліп, эволюциялық теңдеулерге жаңа түзетулер енгізеді. Осы түзетулердің салдары ретінде тиімді тығыздық пен тиімді қысым ұғымдары пайда болып, олар кеңею динамикасын стандартты Фридман теңдеулеріне ұқсас түрде жазуға мүмкіндік береді. Сондықтан әрі қарай өріс теңдеулерін алғаннан кейін оларды тиімді сұйықтық формализмі арқылы талдап, баяулау режимі мен энергия шарттарының орындалуын осы тиімді шамалар арқылы бағалаймыз.

Жалпы түрде $f(R,T)$ функциясының нақты түрін таңдау модельдің физикалық қасиеттерін анықтайды: параметрлердің таңдалуы үдемелі кеңеюдің мүмкіндігіне, баяулау параметрлерінің эволюциясына және энергия шарттарының орындалу аймақтарына әсер етеді. Бұл жұмыстағы тәсілдің ерекшелігі - параметрлік еркіндікті

тек шешім бар деген критериймен емес, сонымен қатар физикалық консистенттілікпен, мысалы, кейінгі бөлімдерде енгізілетін дивергенциясыз шарт пен энергия шарттарын, байланыстыра отырып шектеу. Осылайша таңдалған модельдің нәтижелері бақылаулық космологияға жақын және интерпретацияға қолайлы болуына мән береміз. Осыны ескере отырып, $f(R, T)$ теориясының әсері келесі түрде жазылады:

$$S = \frac{1}{2} \int f(R, T) \sqrt{-g} d^4x + \int L_m \sqrt{-g} d^4x. \quad (1)$$

(1) өрнектегі бірінші интеграл гравитациялық секторды, ал екінші интеграл материя секторын сипаттайды. Мұнда $8\pi G = c = 1$ қолдандық және $g = \det(g_{\mu\nu})$ - метриканың анықтаушысы, ал L_m - материя лагранжианы. $f(R, T)$ функциясы қисықтық скаляры R және энергия-импульс тензорының ізі T арқылы анықталады, әрі қарай есептеулерде $f_R = \frac{\partial f}{\partial R}$ және $f_T = \frac{\partial f}{\partial T}$ сияқты туындылар маңызды рөл атқарады.

Материя көзінің гравитациялық өріске қалай әсер ететінін алу үшін әсердің материя бөлігін метрикаға қатысты вариациялап, энергия-импульс тензоры анықталады. Нақты айтқанда, $T_{\mu\nu}$ материя лагранжианының $g^{\mu\nu}$ бойынша функционалдық туындысы арқылы беріледі, сондықтан келесі анықтамаға келеміз

$$T_{\mu\nu} = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2)$$

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Геометриялық жақтан негізгі шама - Риччи скаляры R келесідей табылады

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Геометриялық шамаларды нақты есептеу үшін алдымен кеңістік-уақыттың метрикасын таңдаймыз. Космологиялық принципке сәйкес Ғаламды Фридман – Леметр – Робертсон-Уокер (FLRW) метрикасы жақсы сипаттайды. Бұл жұмыста қарапайымдылық үшін кеңістігі жазық жағдайы қарастырамыз, себебі бақылаулық деректер кеңістіктің қисықтығы нөлге жуық екенін көрсетеді және бұл таңдау есептеулерді айтарлықтай ықшамдайды. Осылайша, метрика уақыт бойынша өзгертін бір ғана масштабтық фактормен $a(t)$ анықталады.

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5)$$

мұнда $a(t)$ - масштабтық фактор. Осыдан метрика компоненттері келесідей болады. Мұндағы $a(t)$ кеңеюдің уақыт бойынша эволюциясын сипаттайды. Практикалық тұрғыдан $a(t)$ арқылы Хаббл параметрі $H = \frac{\dot{a}}{a}$ және оның туындылары енгізіліп, кейін Риччи тензоры мен Риччи скаляры ықшам түрде есептеледі. (5) метрика диагональ түрінде болғандықтан, метрика компоненттері тікелей оқылады және диагональдан тыс мүшелер нөлге тең болады.

$$g_{00} = -1, g_{11} = a^2(t), g_{22} = a^2(t), g_{33} = a^2(t). \quad (6)$$

Диагональды метрика компоненттері белгілі болған соң, байланыс коэффициенттерін есептейміз. Олар $g_{\mu\nu}$ және оның туындылары арқылы анықталады және Риччи тензорына өтудің негізгі аралық қадамы болып табылады. FLRW метрикасы үшін нөлден өзгеше Кристоффель символдары тек уақыт бойынша туындыларға тәуелді болады, яғни олар $a(t)$ және $\dot{a}(t)$ арқылы өрнектеледі. Осыны пайдаланып, Риччи тензорын стандартты анықтама бойынша жазып, одан әрі (4) формула арқылы Риччи скалярын табамыз

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda. \quad (7)$$

Изотропияға байланысты кеңістіктік диагональ компоненттер бірдей типтес болады. Нәтижесінде келесі стандартты өрнектерді аламыз $R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$, $R_{11} = a\ddot{a} + 2a\dot{a}^2$, $R_{22} = a\ddot{a} + 2a\dot{a}^2$, $R_{33} = a\ddot{a} + 2a\dot{a}^2$. Енді Риччи скаляры анықтамасы бойынша

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}. \quad (8)$$

Кері метриканы қолдана отырып, және R_{00} , R_{11} , R_{22} , R_{33} мәндерін пайдаланып келесіні табамыз

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (9)$$

Хаббл параметрін $H = \frac{\dot{a}}{a}$ деп енгізсек, әрі қарай $H = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$ екенін пайдалансақ

$$R = 6(H + 2H^2). \quad (10)$$

Осылайша, жазық FLRW геометриясы үшін Риччи скаляры R Хаббл параметрі арқылы (10) түріне келеді.

Әрі қарай $f(R, T)$ теориясына көшу үшін материяның қандай түрде енгізілетінін және T шамасының физикалық мағынасын нақтылап алу қажет. Себебі бұл теорияда

геометриялық бөлік қисықтық арқылы ғана емес, материяның сипаттамалары арқылы да өріс теңдеулеріне тікелей ықпал етеді, яғни материя тек көз ретінде емес, сонымен қатар динамиканы түрлендіретін қосымша фактор ретінде қарастырылады. Осы тұрғыда T шамасы материяның тығыздығы мен қысымына тәуелді болатын интегралды сипаттама болып табылады және ол әр түрлі космологиялық кезеңдерде әрқалай мән алып, модельдің эволюциясына түрліше әсер етуі мүмкін. Сондықтан T -ға тәуелділік енгізілгенде стандартты космологиядағы кейбір нәтижелердің, мысалы, баяулау, үдеу шарттары, тиімді күй теңдеуі, энергия шарттарының орындалуы, өзгеруі немесе қайта интерпретациялануы ықтимал. Бұл жұмыста материяны классикалық космологияда жиі қолданылатын идеал сұйық ретінде қарастырамыз, мұндай тәсіл модельді физикалық тұрғыдан түсіндіруге ыңғайлы, сондай-ақ алынатын теңдеулерді бақылаулық сипаттамалармен салыстыруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар $f(R,T)$ теориясында материя – геометрия байланысы күшейген жағдайда энергия-импульс тензорының сақталу заңының өзгеруі мүмкін екені белгілі, сондықтан T -ның нақты енгізілуі әрі кейінгі бөлімдердегі дивергенциясыз шарт пен энергия шарттарын талдаудың негізгі алғышарты болып табылады. Осы себептерді ескере отырып, әрі аналитикалық есептеулерді күрделендірмей модельдің басты ерекшеліктерін көрсету үшін, $f(R,T)$ функциясының ең қарапайым және әдебиеттерде кең қолданылатын сызықтық түрін таңдаймыз. Мұндай таңдау параметрлердің физикалық рөлін анық көруге, жалпы салыстырмалылыққа өтуді бақылауға және материя ізі арқылы геометрияға енгізілетін түзетулердің космологиялық динамикаға ықпалын жүйелі түрде талдауға мүмкіндік береді. Атап айтқанда, параметр мәніне қарай Ғаламның кеңею сценарийі, үдеу режимінің басталуы және энергия шарттарының орындалу аймақтары сандық тұрғыдан өзгеруі мүмкін.

Осы жұмыста $f(R,T)$ гравитациясының әдебиетте кең қолданылатын және есептеулерді күрделендірмей материя-геометрия байланысының әсерін айқын көрсетуге мүмкіндік беретін сызықтық түрі қарастырылады, сондықтан $f(R,T)$ келесідей жазылады

$$f(R, T) = R + 2\lambda T, \quad (11)$$

мұндағы λ - материя-геометрия байланысының күшін сипаттайтын параметр. $\lambda = 0$ болғанда модель жалпы салыстырмалылыққа жуықтайды, ал $\lambda \neq 0$ кезінде материяның ізі арқылы геометрияға қосымша әсер пайда болады. Бұл параметрдің мәні өзгерген сайын Ғалам динамикасы да, мысалы, үдеу кезеңінің басталуы немесе энергия шарттарының орындалуы, сандық тұрғыдан әртүрлі болуы мүмкін.

Космологияда материяны ең қарапайым түрде идеал сұйықтық ретінде модельдеу кең тараған. Бұл жағдайда энергия-импульс тензоры

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (12)$$

мұнда ρ - энергия тығыздығы, p - изотроп қысым, ал u_μ - сұйықтықтың төрт-жылдамдығы. Енді T -ның ρ және p арқылы өрнектелуін қарастыратын болсақ, (12)-ні (3)-ке қоя отырып келесі өрнекті аламыз

$$T = g^{\mu\nu}[(\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}] = (\rho + p)g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu + p g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}, \quad (13)$$

$$T = (\rho + p)(-1) + p \cdot 4 = -\rho - p + 4p = -\rho + 3p. \quad (14)$$

Осылайша, T ізінің таңбасы мен мәні тікелей ρ және p арқылы анықталады. Бұл нәтиже $f(R, T) = R + 2\lambda T$ моделінде өте маңызды, өйткені теориядағы қосымша мүшелер дәл осы T арқылы өріс теңдеулеріне кіреді және λ параметрімен бірге космологиялық эволюцияны өзгертеді [14,15]. Бұл жұмыста теориялық модельден алынатын функциялар Wolfram Mathematica ортасында сандық түрде есептеліп, қызыл ығысу z бойынша графиктер түрінде көрсетіледі. Есептеулер барысында $H(z)$ және $q(z)$ тәуелділіктері негізінде кейінгі бөлімдерде қарастырылатын космологиялық шамалардың эволюциясы талданады.

Нәтижелер мен талқылау

Бұл бөлімде дивергенциясыз баяулау параметрлерін қолдана отырып, $f(R, T)$ моделі үшін Ғаламның кеңею тарихын $a(z)$ және $H(z)$ функциялары арқылы сипаттаймыз [16–23]. Алынған теңдеулер негізінде алдымен негізгі кинематикалық шамалардың эволюциясын талдап, кейін $f(R, T) = R + 2\lambda T$ сызықтық моделі жағдайында энергия тығыздығы $\rho(z)$, қысым $p(z)$ және күй теңдеуі параметрі $\omega(z)$ функцияларын есептейміз. Сонымен қатар λ параметрінің өзгеруі кеңею динамикасына және тиімді сипаттамалардың мінезіне қалай әсер ететінін сандық түрде көрсетіп, нәтижелерді графиктер арқылы салыстырамыз. Осылайша, модель параметрлерінің физикалық мағынасын ашып, алынған нәтижелерді стандартты космологиялық сценарийлермен салыстыруға мүмкіндік береміз.

Кеңею тарихын сипаттайтын негізгі функциялар

Кеңею тарихын сипаттауда ең қолайлы шамалардың бірі – баяулау параметрі $q(z)$. Ол Ғаламның кеңеюі үдеумен жүріп жатыр ма, әлде баяулап жатыр ма деген сұраққа тікелей жауап береді және кеңею динамикасының жалпы бағытын көрсетеді. Бақылаулық талдауларда $q(z)$ үшін қарапайым параметрленулер кеңінен қолданылады, себебі олар аз ғана параметр арқылы кең қызыл ығысу аралығындағы эволюцияны сипаттауға мүмкіндік береді және есептеулер кезінде артық еркіндікке жол бермейді [24–26]. Таңдаған параметрлену қазіргі кезеңдегі мәнді бөлек айқындап, қызыл ығысу артқандағы өзгерісін жеке параметр арқылы реттейді, сондықтан нәтижелердің физикалық интерпретациясы жеңілдейді. Сонымен қатар бұл тәсіл кеңеюдің режим ауысуын, яғни баяулау кезеңінен үдеу кезеңіне өту тәрізді бір функция арқылы көрсетуге мүмкіндік береді және әрі қарай $H(z)$, $a(z)$ сияқты негізгі сипаттамаларды қалпына келтіру үшін бастапқы негіз болады. Осыған сәйкес $q(z)$ төмендегідей беріледі

$$q(z) = q_0 + q_1 \frac{z(1+z)}{1+z^2}. \quad (15)$$

Параметрлеудің (15) түрі бірнеше талапты бір мезгілде қанағаттандыру үшін таңдалды: біріншіден, ол қазіргі кезеңдегі мәнді тікелей береді, яғни $q(0) = q_0$, екіншіден, $z \rightarrow \infty$ кезінде $q(z) \rightarrow q_0 + q_1$ шегіне өтеді, сондықтан ерте Ғаламдағы асимптоталық режим екі параметрмен сипатталады; үшіншіден, бөлгіш $1 + z^2 > 0$ болғандықтан физикалық аймақта ($-1 \leq z < \infty$) полюстер жоқ, яғни $q(z)$ шекті және үздіксіз болып, $H(z)$, $\rho(z)$, $p(z)$ есептеулерінде жасанды сингулярлықтардың пайда болуын болдырмайды. Сонымен қатар $z \approx 0$ аймағында $q(z) = q_0 + q_1 z + O(z^2)$ жуықтауы орындалып, төмен қызыл ығысу деректерімен салыстыруға ыңғайлы. Бұл форма (16) теңдеуін аналитикалық интегралдауға мүмкіндік беріп, кейінгі энергия шарттарын талдауды жеңілдетеді. Осы параметрлену z аймағының кең диапазонында орнықты жұмыс істейді және баяулаудан үдеуге өтуді бірқалыпты сипаттауға мүмкіндік береді. FRW космологиясында баяулау параметрі

$q = -1 - \frac{H}{H^2}$ түрінде анықталады. Егер параметрлеу дұрыс таңдалмаса, $q(z)$ кейбір z мәндерінде шексіздікке ұмтылып, нәтижесінде $H(z)$ және одан туындайтын тиімді шамаларда жасанды сингулярлықтар пайда болуы мүмкін. Сондықтан (15) параметрлену «дивергенциясыз» деп аталады, ол $q(z)$ -тің зерттелетін диапазонда шекті әрі үздіксіз болуын қамтамасыз етіп, бақылаулық салыстыру мен энергия шарттарын талдауды математикалық артефактыларсыз жүргізуге мүмкіндік береді. $q(z)$ белгілі болғанда Хаббл параметрі келесі байланыстан табылады

$$\frac{d \ln H}{dz} = \frac{1+q(z)}{1+z}, \quad (16)$$

ал интегралдау нәтижесінде

$$H(z) = H_0(1+z)^{(1+q_0)}(1+z^2)^{\frac{q_1}{2}}, \quad (17)$$

өрнегін алдық. Есептеулерде бір үйлесімді параметрлер жиынын қолдандық (H_0, q_0, q_1) = (66.44, -0.55, 0.78).

Таңдалған параметрлену (15) кинематикалық тұрғыдан $q(z)$ және $H(z)$ эволюциясын тұтас диапазонда сипаттауға мүмкіндік береді. Атап айтқанда, қазіргі мән $q(0) = q_0$ үдемелі кеңею режимін көрсетсе, ал $z \rightarrow \infty$ шегінде $q(z) \rightarrow q_0 + q_1$ тұрақты шекке ұмтылады, яғни ерте кезеңдерде баяулау режимі орнығады ($q_0 + q_1 > 0$). Үдеуден баяулауға өту нүктесі $q(z_t) = 0$ шартымен анықталады; берілген параметрлер үшін өтпелі қызыл ығысу $q(z_t)=0$ шамамен $z_t \approx 0.60$ болады, бұл Ғаламның динамикасы үдеуден баяулауға немесе керісінше өтетін кезеңді сандық түрде сипаттайды. Сонымен қатар, (17) теңдеуі арқылы алынған $H(z)$ функциясы полюссіз және шекті болып, кейін $\rho(z)$, $p(z)$ және энергия шарттарын талдауда жасанды сингулярлықтардың пайда болуына жол бермейді. Осы себепті (15)

параметрленуі сандық есептеулер үшін орнықты және салыстырмалы талдау жүргізуге ыңғайлы негіз береді.

Энергия тығыздығы мен қысымның эволюциясы

Бұл бөлімде (11) сызықтық $f(R,T)$ моделін пайдаланып, энергия тығыздығы $\rho(z)$ мен қысым $p(z)$ функцияларының қызыл ығысуға байланысты өзгерісін талдаймыз. Бұл шамалар кеңею динамикасының физикалық интерпретациясын беретін негізгі сипаттамалар болып табылады: $\rho(z)$ Ғаламдағы энергияның тиімді деңгейін, ал $p(z)$ кеңеюдің үдеуіне немесе баяулауына әсер ететін қысымдық үлесті сипаттайды. Сондықтан $\rho(z)$ және $p(z)$ эволюциясын анықтау арқылы таңдалған модельдің стандартты космологиялық сценарийлермен сәйкестігін, сондай-ақ параметрлердің физикалық мағынасын нақты бағалауға болады. Байланыс параметрінің әсерін салыстыру үшін $\lambda = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$ мәндерін қарастырамыз. λ мәні өзгерген сайын материя-геометрия байланысының күші де өзгереді, соның нәтижесінде $\rho(z)$ мен $p(z)$ қисықтарының пішіні және олардың эволюциялық қарқыны сандық тұрғыдан әртүрлі болуы мүмкін. Бұл айырмашылықтар кеңею режимінің қалай қалыптасатынын және энергия шарттарының орындалу аймақтарын түсіндіруде маңызды рөл атқарады. Есептеулерді ықшам жүргізу үшін Хаббл параметрінің уақыт бойынша туындысын баяулау параметрі арқылы өрнектейміз. Бұл тәсілдің артықшылығы - H -тің динамикасын бір ғана кинематикалық функциямен байланыстырып, әрі қарай алынған теңдеулерді z айнымалысы арқылы жүйелі түрде интегралдауға мүмкіндік береді. Осыған сәйкес келесі қатынас қолданылады

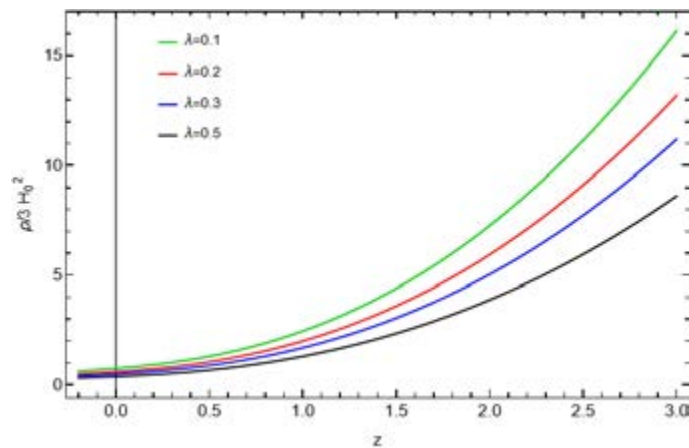
$$\dot{H} = -(1 + q)H^2. \quad (18)$$

Осы модель үшін энергия тығыздығы ρ және қысым p шамалары H және \dot{H} арқылы төмендегідей өрнектеледі

$$\rho(z) = \frac{(3+6\lambda)}{(1+3\lambda)^2 - \lambda^2} H^2 - \frac{2\lambda}{(1+3\lambda)^2 - \lambda^2} \dot{H}, \quad (19)$$

$$p(z) = -\frac{(3+6\lambda)}{(1+3\lambda)^2 - \lambda^2} H^2 - \frac{2(1+3\lambda)}{(1+3\lambda)^2 - \lambda^2} \dot{H}. \quad (20)$$

Мұнда $H(z)$ (17) формула арқылы, ал $\dot{H}(z)$ (18) формула арқылы тікелей есептеледі. Сурет 1- $\rho(z)$ және $p(z)$ тәуелділіктері λ -ның әртүрлі мәндері үшін көрсетілген. Графиктерден z артқан сайын энергия тығыздығы $\rho(z)$ өсетінін көреміз, бұл ерте кезеңдерде тығыздықтың жоғары болуына сәйкес келеді. Ал кеш уақыттарда қысым $p(z)$ теріс мәндер аймағында қалып, үдемелі кеңею режиміне тән тиімді динамиканы көрсетеді. Бұл материя - геометрия байланысының Ғалам эволюциясына сандық тұрғыдан ықпал ететінін айқындайды.



Сурет 1 – Өлшемсіз энергия тығыздығы $\rho/(3H_0^2)$ - нің z - ке тәуелділігі

Күй теңдеуі параметрі

Күй теңдеуі параметрі $\omega(z)$ энергия тығыздығы мен қысым арасындағы байланысты сипаттай отырып, модельдегі тиімді космологиялық сұйықтықтың қасиетін анықтайды. Бұл шама кеңею динамикасының табиғатын түсіндіруде аса маңызды, өйткені дәл $\omega(z)$ арқылы модельдің қандай режимге жақын екенін сапалық түрде бағалауға болады: $\omega(z)$ белгілі бір аралықта тұрақты немесе баяу өзгерсе, онда сол кезеңдегі физикалық режим айқын көрінеді. Сонымен қатар $\omega(z)$ -тің қызыл ығысуға тәуелді эволюциясы кеңеюдің үдеулі немесе баяулайтын кезеңге өтуін сипаттайтын негізгі көрсеткіштердің бірі болып табылады, өйткені қысым мен тығыздықтың арақатынасы кеңею үдеуіне тікелей әсер етеді.

Бұл жұмыста $\omega(z)$ функциясын есептеу екі мақсатқа қызмет етеді. Біріншіден, бұл шама арқылы алынған $\rho(z)$ және $p(z)$ нәтижелерінің физикалық интерпретациясы жеңілдейді: қысымның теріс мәндерге ауысуы немесе оның шамасының өзгеруі кеңеюдің үдеу режимімен қалай байланысатыны айқындалады. Екіншіден, $\omega(z)$ λ параметрінің әсерін бір функцияда жинақтап көрсетуге мүмкіндік береді, себебі λ өзгерген сайын тек $\rho(z)$ пен $p(z)$ ғана емес, олардың арақатынасы да өзгереді. Нәтижесінде $\omega(z)$ қисықтарының пішіні, олардың шектік мәндері және қызыл ығысумен өзгеру қарқыны әртүрлі болуы мүмкін; бұл айырмашылықтар модельдің стандартты Λ CDM сценарийіне жақындығын немесе одан ауытқуын сапалық әрі сандық тұрғыдан бағалауға жағдай жасайды.

Сонымен қатар $\omega(z)$ параметрі энергия шарттарын талдаумен де тығыз байланысты. Энергия шарттары көбіне тығыздық пен қысым комбинациялары арқылы жазылатындықтан, $\omega(z)$ функциясының мінезі белгілі бір параметрлік аймақтарда энергия шарттарының орындалуына немесе бұзылуына әкелуі мүмкін. Сондықтан $\omega(z)$ -ті есептей отырып, кейінгі бөлімдердегі NEC, WEC, SEC, DEC талаптарымен бірлесе қарастырып, физикалық тұрғыдан жарамды шешімдердің аймағын нақтылаймыз. Осы тұрғыдан $\omega(z)$ функциясы алынған шешімдерді түсіндіру ғана емес, сонымен қатар модельдің параметрлерін физикалық критерийлер арқылы сүзгіден өткізу үшін де қолайлы құрал болып табылады.

Осыған сәйкес күй теңдеуі параметрі төмендегі қатынас арқылы анықталады

$$\omega(z) = \frac{p(z)}{\rho(z)} \quad (21)$$

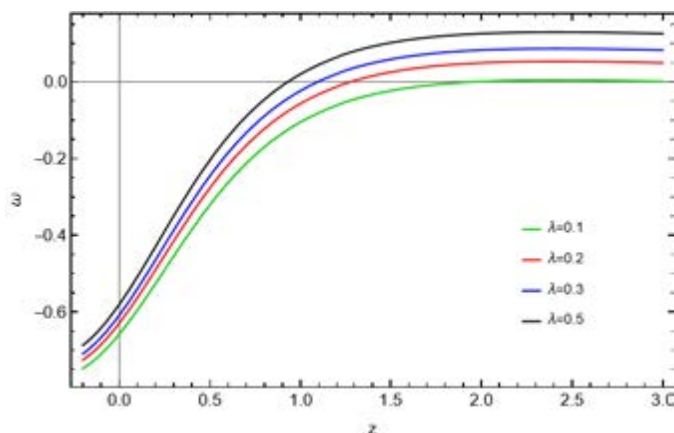
(20), (19) формулаларын қолдансақ, $\omega(z)$ келесі түрде жазылады

$$\omega(z) = -\frac{(3+6\lambda)H^2(z)+2(1+3\lambda)H(z)}{(3+6\lambda)H^2(z)-2\lambda H(z)} \quad (22)$$

Егер $H = -(1+q)H^2$ қатынасын енгізсек, онда $\omega(z)$ тек $q(z)$ арқылы өрнектеледі

$$\omega(z) = -\frac{(3+6\lambda)-2(1+3\lambda)(1+q(z))}{(3+6\lambda)+2\lambda(1+q(z))} \quad (23)$$

Сурет 2 - $\omega(z)$ эволюциясы λ -ның әртүрлі мәндері үшін берілген. График бойынша үлкен қызыл ығысу аймағында $\omega(z)$ материяға жуық режимге ығысады, ал қазіргі кезеңге жақындағанда $\omega(z)$ теріс мәндер аймағында қалып, үдемелі кеңеюге сәйкес келетін интервалдардың бар екенін көрсетеді.



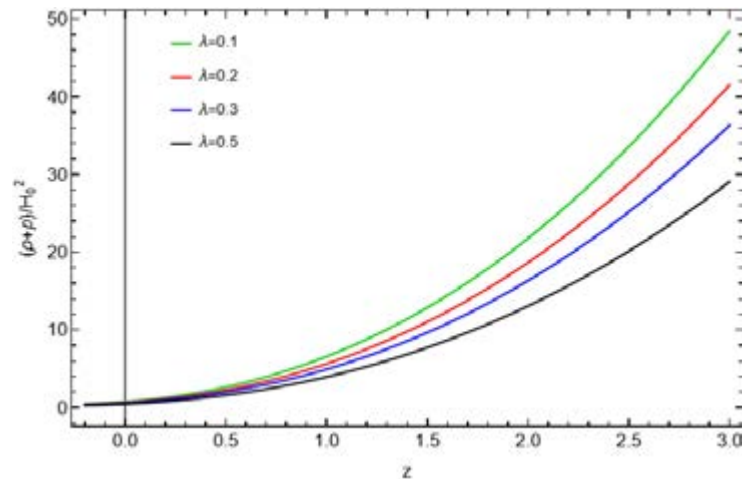
Сурет 2 - Әртүрлі λ мәндері үшін толық күй теңдеуі параметрі ω -ның қызыл ығысу z -ке тәуелді эволюциясы

Осылайша, алынған нәтижелер дивергенциясыз параметрленудің $H(z)$ және $q(z)$ арқылы кеңею тарихын орнықты сипаттайтынын, ал $f(R, T) = R + 2\lambda T$ моделінде λ параметрінің $\rho(z)$, $p(z)$, $\omega(z)$ эволюциясын өзгертіп, кеш уақыттағы үдемелі кеңею режимін сипаттауға мүмкіндік беретінін көрсетеді.

Алынған $\rho(z)$ және $p(z)$ функцияларының физикалық дұрыстығын тексеру үшін энергия шарттарын қарастырамыз. Классикалық түрде келесі екі шартқа назар аударамыз: NEC – нөлдік энергия шарты (Null Energy Condition), WEC – әлсіз энергия шарты (Weak Energy Condition), SEC – күшті энергия шарты (Strong Energy Condition), DEC – басым энергия шарты (Dominant Energy Condition)

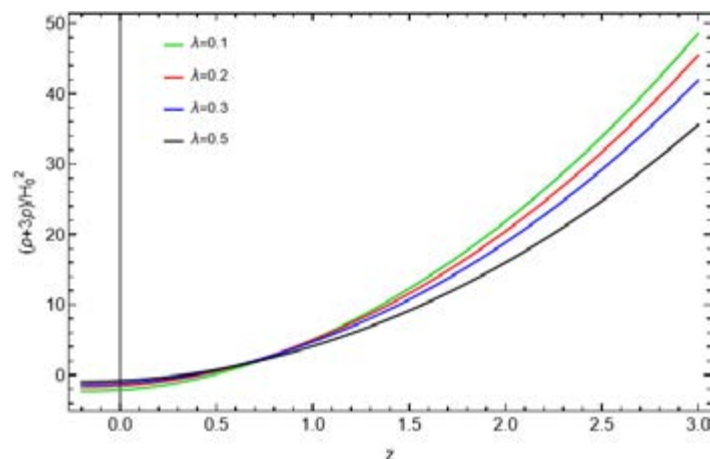
NEC шарты $\rho(z) + p(z) \geq 0$ теңсіздігімен анықталады. Осыған сәйкес өлшемсіз түрде $(\rho + p)/H_0^2$ шамасын есептеп, оның қызыл ығысумен өзгерісінің әртүрлі

мәндері үшін графикте көрсетілді. Сурет 3-тен $(\rho + p)/H_0^2$ функциясы кең z аралығында оң мәндер аймағында сақталатынын көреміз, яғни NEC шарты модель эволюциясы барысында орындалады. Бұл нәтиже материя–геометрия байланысы енгізілген жағдайда да энергия ағынының физикалық тұрғыдан қабылданатын режимде қалатынын көрсетеді.



Сурет 3 – NEC: $(\rho + p)/H_0^2$ функциясының z -ке тәуелділігі

SEC шарты $\rho(z) + 3p(z) \geq 0$ түрінде жазылады және ол гравитациялық тартылыстың әдеттегі режимін сипаттайтын негізгі энергия шарттарының бірі болып табылады. Классикалық космологияда бұл шарттың бұзылуы көбіне кеш уақыттағы үдеумен байланыстырылып, тиімді қысымның теріс үлесі күшейетін режимдердің бар екенін көрсетеді.



Сурет 4 – SEC: $(\rho + 3p)/H_0^2$ функциясының z -ке тәуелділігі

Сурет 4-те $(\rho + 3p)/H_0^2$ шамасының қызыл ығысуға тәуелділігі $\lambda = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$ мәндері үшін берілген. Бұл салыстыру λ параметрінің материя–геометрия байланысын күшейту арқылы кеңею динамикасын сандық тұрғыдан қалай

өзгертетінін көрсетуге мүмкіндік береді. Графиктен төмен қызыл ығысуларда шаманың нөл маңында өзгеруі немесе белгілі аралықтарда нөлге жақындауы SEC шартының кеш уақыттарда бұзылуы мүмкін екенін аңғартады, ал бұл үдемелі кеңею сценарийімен үйлеседі. Сонымен бірге λ өзгерген сайын қисықтардың деңгейі мен өсу қарқыны айырмашылық көрсетеді, яғни SEC талаптарының орындалу аймақтары параметрге сезімтал түрде ығысады; демек, λ кеш уақыттағы динамиканы реттейтін маңызды фактор ретінде көрінеді. Осы нәтижелер $f(R, T) = R + 2\lambda T$ моделінде үдеуді сипаттайтын режимдерде SEC шартының бұзылуы мүмкін болатынын және бұл бұзылудың λ мәніне тәуелді екенін көрсетеді.

DEC шарты идеал сұйықтық үшін $\rho(z) \geq 0$, $\rho(z) \geq |p(z)|$ түрінде жазылады. Бұл талап энергия тығыздығының қысым модулінен кем болмауын қамтамасыз етіп, энергия-импульс ағынының физикалық тұрғыда басым режимде қалуын сипаттайды, яғни аса экзотикалық күйдің басым болу мүмкіндігін шектейді. Алынған $\rho(z)$ және $p(z)$ нәтижелері бойынша қарастырылған λ мәндері үшін $\rho(z) - |p(z)|$ шамасы зерттелген қызыл ығысу аралығында оң мәнді сақтайды, сондықтан DEC шарты осы параметрлер жиыны үшін орындалады.

Осылайша, энергия шарттарын талдау $f(R, T) = R + 2\lambda T$ моделінің таңдалған параметрлер аймағында физикалық тұрғыдан келісімді екенін көрсетеді. Атап айтқанда, NEC және WEC шарттарының орындалуы тиімді энергия тығыздығының оң болуын және энергия ағынының физикалық мағынада қалуын қамтамасыз етеді, ал DEC шарты қысым мен тығыздықтың қатынасы себепті шектен тыс режимдердің пайда болмауын шектейтін қосымша критерий ретінде қызмет етеді. Сонымен қатар SEC шарты ($\rho + 3p$) комбинациясымен анықталатындықтан, оның бұзылуы көбіне кеш уақыттардағы үдеумен байланысты және тиімді қысымның теріс үлесі күшейетін режимдердің бар екенін білдіреді. Алынған графиктерімізде λ параметрінің өзгеруі осы комбинацияның қызыл ығысуға тәуелді эволюциясын сандық тұрғыдан өзгертетінін көрсетіп, SEC шартын бұзатын немесе оны қайта қалпына келтіретін аймақтардың λ -ға сезімтал екенін аңғартады. Демек, λ материя-геометрия байланысын реттейтін маңызды параметр болып табылады және оның мәніне қарай модель кеш уақыттардағы үдеуді сипаттайтын режимдерді бере алады, әрі энергия шарттары тұрғысынан физикалық жарамды параметрлік облыстарды бөліп көрсетуге мүмкіндік береді. Соңында, бұл талдау алынған нәтижелерді стандартты Λ CDM болжамдарымен салыстыруға негіз болып, модификацияланған гравитацияның бақылаулық тұрғыдан тексерілуіне алғышарт жасайды.

Қорытынды

Бұл жұмыста материя – геометрияның минималды емес байланысы бар $f(R, T)$ гравитациясының сызықтық моделі $f(R, T) = R + 2\lambda T$ қарастырылды. Дивергенциясыз баяулау параметрленуі негізінде Ғаламның кеңею тарихын сипаттайтын $H(z)$ функциясы қалпына келтіріліп, алынған өрнек модификацияланған Фридман теңдеулеріне енгізілді. Осы тәсіл арқылы негізгі космологиялық шамалардың эволюциясы зерттеліп, энергия тығыздығы $\rho(z)$, қысым $p(z)$ және күй теңдеуі параметрі $\omega(z)$ үшін аналитикалық және графикалық нәтижелер алынды. Нәтижелер λ

параметрінің модель динамикасына айтарлықтай әсер ететінін көрсетті: λ өзгерген сайын кеңею қарқынының сипаттамалары, $\rho(z)$ және $p(z)$ функцияларының деңгейі мен эволюциялық мінезі, сондай-ақ $\omega(z)$ параметрінің қызыл ығысуға тәуелділігі сандық тұрғыдан өзгереді. Бұл байланыс параметрі материяның ізі арқылы геометрияға енгізілетін түзетулерді реттеп, кеш уақыттардағы үдеуді сипаттайтын тиімді динамиканың қалыптасуына ықпал ететіні байқалады.

Модельдің физикалық үйлесімділігін бағалау мақсатында классикалық энергия шарттары NEC, WEC, SEC, DEC талданды. Талдау нәтижесінде таңдаулы параметрлер аймағында NEC және WEC шарттарының орындалуы модельдің физикалық тұрғыдан қабылданатын режимдер бере алатынын көрсетеді. Сонымен қатар үдемелі кеңеюмен байланысты режимдерде SEC шартының кейбір қызыл ығысу аралықтарында бұзылуы мүмкін екені анықталды; бұл құбылыс үдемелі кеңею сценарийімен үйлеседі және λ параметрінің кеш уақыттардағы динамиканы реттеудегі ролін айқындайды. Демек, энергия шарттары тұрғысынан алынған нәтижелер $f(R,T)=R+2\lambda T$ моделінің үдеуді сипаттайтын режимдерге қабілетті екенін және сонымен бірге физикалық жарамды параметрлік аймақтарды бөліп көрсетуге мүмкіндік бар екенін растайды.

Жалпы алғанда, дивергенциясыз кинематикалық параметрлену $f(R,T)$ гравитациясы шеңберінде кеш уақыттағы космостық үдеуді сапалық тұрғыдан түсіндіруге және модель параметрлерінің әсерін жүйелі түрде бағалауға тиімді құрал болып табылады. Болашақта жұмысты кеңейту үшін λ параметрін кеңірек диапазонда зерттеу, бақылаулық деректермен бірлескен параметрлік шектеулер жүргізу, сондай-ақ тұрақтылық пен қозуларды талдау бағыттары перспективалы болып табылады. Бұл қадамдар ұсынылған модельдің бақылаулық тұрғыдан жарамдылығын тереңірек тексеруге және нәтижелерді стандартты Λ CDM болжамдарымен толық салыстыруға мүмкіндік береді.

Алғыс айту, мүдделер қақтығысы

Авторлар мүдделер қақтығысы жоқтығын мәлімдейді.

Авторлардың қосқан үлесі

Жадыранова А.А. – зерттеу міндеттерін тұжырымдау, әдіснаманы әзірлеу, ғылыми жетекшілік және жалпы редакциялау.

Исмаил Ү.Қ. – қолжазбаны дайындау, аналитикалық есептеулер жүргізу, материалдарды жинақтау және нәтижелерді талдау.

Сноу У.М. – ғылыми кеңес беру, теориялық талқылау, нәтижелерді интерпретациялау және мәтінді редакциялау.

Жумабекова В.Н. – әдебиеттерге шолу, нәтижелерді интерпретациялау, қолжазбаны редакциялау.

Жусупова Н.К. – есептеулерді қолдау, графиктерді дайындау және нәтижелерді рәсімдеу.

Әдебиеттер тізімі

1. A.G. Riess et al., Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *The astronomical journal* 116, 6.1009 (1998). <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/9805201>
2. S. Perlmutter et al., Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae, *The Astrophysical Journal* 517, 6.656 (1999). <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/9812133>
3. T. Harko et al., $f(R,T)$ gravity, *Physical Review D-Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 84, p.024020 (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.024020>
4. D. Foreman-Mackey et al., emcee: the MCMC hammer, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 125, 6.306 (2013). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1202.3665>
5. M. Moresco, Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at $z \sim 2$, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* 450, 6.L16-L20 (2015). <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slv037>
6. D. M. Scolnic et al., The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample, *The Astrophysical Journal* 859, 6.101 (2018). <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab9bb>
7. W. Khylllep, A. Paliathanasis, J. Dutta, Cosmological solutions and growth index of matter perturbations in $f(Q)$ gravity, *Physical Review D* 103, 6.103521 (2021). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.103521>
8. M. Koussour, S.H. Shekh, M. Bennai, Anisotropic nature of space-time in $f(Q)$ gravity, *Physics of the Dark Universe* 36, 6.101051 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.dark.2022.101051>
9. M. Koussour, M. Bennai, On a Bianchi type-I space-time with bulk viscosity in $f(R,T)$ gravity, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 19, 6.2250038 (2022). <https://doi.org/10.1142/S0219887822500384>
10. M. Koussour, M. Bennai, Cosmological models with cubically varying deceleration parameter in $f(R,T)$ gravity, *Afrika Matematika* 33, 6.27 (2022). <https://doi.org/10.1007/s13370-022-00964-3>
11. M. Koussour et al., Late-time acceleration in $f(Q)$ gravity: Analysis and constraints in an anisotropic background, *Annals of Physics* 445, 6.169092 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.aop.2022.169092>
12. M. Koussour, S.H. Shekh, M. Bennai, Cosmic acceleration and energy conditions in symmetric teleparallel $f(Q)$ gravity, *Journal of High Energy Astrophysics* 35, 6.43-51 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.jheap.2022.05.002>
13. M. Koussour et al., Quintessence Universe and cosmic acceleration in $f(Q,T)$ gravity, *International Journal of Modern Physics D* 31, 6.2250115 (2022). <https://doi.org/10.1142/S0218271822501152>
14. N. Myrzakulov et al., Constraining the $f(R,T)=R+2\lambda T$ cosmological model using recent observational data, *Chinese Physics C* 47, 6.115107 (2023). <https://doi.org/10.1088/1674-1137/acf2fa>
15. B.S. Goncalves, P. Moraes, B. Mishra, Cosmology from Non-Minimal Geometry-Matter Coupling, *Fortschritte der Physik* 71, 6.2200153 (2023). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.05918>
16. M. Koussour, A. De, Observational constraints on two cosmological models of $f(Q)$ theory, *The European Physical Journal C* 83, 6.400 (2023). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.11765>
17. M. Koussour et al., A New Parametrization of Hubble Parameter in $f(Q)$ Gravity, *Fortschritte der Physik* 71, 6.2200172 (2023). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.04723>
18. M. Koussour et al., Constant sound speed and its thermodynamical interpretation in $f(Q)$ gravity, *Nuclear Physics B* 990, 6.116158 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2023.116158>
19. M. Koussour et al., Thermodynamical aspects of Bianchi type-I Universe in quadratic form of $f(Q)$ gravity and observational constraints, *Journal of High Energy Astrophysics* 37, 6.15-24 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.jheap.2022.11.002>

20. N. Myrzakulov et al., Cosmological implications of the constant jerk parameter in $f(Q,T)$ gravity theory, Chinese Journal of Physics. 86, 6.300-312 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2023.10.001>
21. K. El Bourakadi et al., Constant-roll and primordial black holes in $f(Q,T)$ gravity, Physics of the Dark Universe. 41, 6.101246 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.dark.2023.101246>
22. T. Vinutha, V.V. Kuncham, S.K. Kolli, The study of anisotropic perfect fluid cosmological models in $f(R,T)$ gravity, General Relativity and Gravitation. 55, 6.64 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10714-023-03112-9>
23. N. Myrzakulov, M. Koussour, D.J. Gogoi, A new $Om(z)$ diagnostic of dark energy in general relativity theory, The European Physical Journal C. 83, 6.594 (2023). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11794-3>
24. M. Koussour et al., Observational constraints on the equation of state of viscous fluid in $f(R,T)$ gravity, Physics of the Dark Universe. 46, 6.101577 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.dark.2024.101577>
25. M. Koussour et al., Constraints on bulk viscosity in $f(Q,T)$ gravity from $H(z)$ /Pantheon+ data, Physics of the Dark Universe. 45, 6.101527 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.dark.2024.101527>
26. M. Koussour et al., Exploring accelerated expansion in the universe: A study of $f(Q,T)$ gravity with parameterized EoS and cosmological constraints, Chinese Journal of Physics. 90, 6.108-120 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2024.04.024>

A.A. Zhadyranova¹, U.K. Ismail*¹, W.M. Snow², V.N. Zhumabekova³, N.K. Zhusupova³

¹L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

²Indiana University Bloomington, Bloomington, United States of America

³Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

(E-mail: a.a.zhadyranova@gmail.com, umitismail848@gmail.com, wsnnow@iu.edu, zh.venera@mail.ru, zhnaz88@gmail.com)

Energy conditions in non-minimal $f(R, T)$ gravity with a divergence-free parameterization of the deceleration parameter

Abstract. In this work, we study a divergence-free parameterization of the deceleration parameter within the simplest linear $f(R,T)$ modified-gravity model featuring a non-minimal matter-geometry coupling, $f(R,T)=R+2\lambda T$, where R is the Ricci scalar, T is the trace of the energy-momentum tensor, and λ is the coupling parameter. Using this parameterization, we derive the Hubble parameter as a function of redshift, $H(z)$, and substitute it into the modified Friedmann equations. The model parameters are constrained with observational data from OHD (cosmic chronometers) and the Pantheon supernova compilation, and the present-day values of H_0 , q_0 , and the evolutionary component q_1 are numerically estimated; the results indicate a smooth transition of the Universe from decelerated to accelerated expansion. In addition, for different values of λ , we analyze the time evolution of the energy density ρ and the effective equation-of-state parameter ω , identify deviations from the Λ CDM scenario, and clarify the role of λ in shaping the global cosmological dynamics. The energy-condition analysis shows that the NEC and DEC are satisfied throughout the evolution, whereas the SEC is violated at late times, in agreement with the observed cosmic acceleration. Overall, the divergence-free parameterization within $f(R,T)$ gravity provides a viable framework to account for late-time acceleration while remaining consistent with observational and theoretical constraints. The results also provide a basis for a comparative analysis with the standard Λ CDM model and for placing observational bounds on the coupling parameter λ .

Key words: Divergence-free deceleration parameter, $f(R, T)$ gravity, non-minimal coupling, cosmic acceleration, energy conditions, equation-of-state parameter, Λ CDM.

А.А. Жадыранова¹, У.Қ. Исмаил^{*1}, У.М. Сноу², В.Н. Жумабекова³, Н.К. Жусупова³

¹ Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

² Университет Индианы в Блумингтоне, Блумингтон, Соединённые Штаты Америки

³ Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан
(E-mail: a.a.zhadyranova@gmail.com, umitismail848@gmail.com, wsnow@iu.edu, zh.venera@mail.ru, zhnaz88@gmail.com)

Бездивергентная параметризация параметра замедления и энергетические условия в неминимальной $f(R, T)$ гравитации

Аннотация. В данной работе исследуется бездивергентную параметризацию параметра замедления в наиболее простой линейной модели модифицированной гравитации $f(R, T)$ с неминимальной связью материи и геометрии: $f(R, T) = R + 2\lambda T$, где R - скаляр Риччи, T - след тензора энергии-импульса, λ - параметр связи. На основе указанной параметризации выводится параметр Хаббла в виде зависимости от красного смещения $H(z)$, после чего он подставляется в модифицированные уравнения Фридмана. Параметры модели ограничиваются наблюдательными данными ОНД (cosmic chronometers) и компиляции сверхновых Pantheon. Для современных значений численно оцениваются H_0 , q_0 и эволюционная компонента q_1 , полученные результаты показывают плавный переход Вселенной от фазы замедленного расширения к ускоренному. Кроме того, для различных значений λ анализируется временная эволюция плотности энергии ρ и параметра полного уравнения состояния ω , выявляются отклонения от модели Λ CDM и уточняется роль параметра λ в формировании космологической динамики. Проверка энергетических условий показывает, что условия NEC и DEC выполняются на протяжении эволюции, тогда как условие SEC нарушается на поздних временах, что согласуется с наблюдаемым космическим ускорением. В целом, бездивергентная параметризация в рамках $f(R, T)$ - гравитации позволяет описывать поздневременное ускорение, одновременно сохраняя согласованность с наблюдательными и теоретическими ограничениями. Полученные результаты создают основу для сравнительного анализа со стандартной моделью Λ CDM и для наложения наблюдательных ограничений на параметр λ .

Ключевые слова: бездивергентный параметр замедления, $f(R, T)$ гравитация, неминимальная связь, космическое ускорение, энергетические условия, параметр уравнения состояния, Λ CDM.

References

1. A.G. Riess et al., Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *The astronomical journal* 116, p.1009 (1998). <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/9805201>
2. S. Perlmutter et al., Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae, *The Astrophysical Journal*. 517, p.656 (1999). <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/9812133>
3. T. Harko et al., $f(R, T)$ gravity, *Physical Review D-Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 84, p.024020 (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.024020>
4. D. Foreman-Mackey et al., emcee: the MCMC hammer, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 125, p.306 (2013). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1202.3665>
5. M. Moresco, Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at $z \sim 2$, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. 450, p.L16-L20 (2015). <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slv037>

6. D. M. Scolnic et al., The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample, *The Astrophysical Journal* 859, p.101 (2018). <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab9bb>
7. W. Khylllep, A. Paliathanasis, J. Dutta, Cosmological solutions and growth index of matter perturbations in $f(Q)$ gravity, *Physical Review D* 103, p.103521 (2021). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.103521>
8. M. Koussour, S.H. Shekh, M. Bennai, Anisotropic nature of space-time in $f(Q)$ gravity, *Physics of the Dark Universe* 36, p.101051 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.dark.2022.101051>
9. M. Koussour, M. Bennai, On a Bianchi type-I space-time with bulk viscosity in $f(R,T)$ gravity, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 19, p.2250038 (2022). <https://doi.org/10.1142/S0219887822500384>
10. M. Koussour, M. Bennai, Cosmological models with cubically varying deceleration parameter in $f(R,T)$ gravity, *Afrika Matematika*. 33, p.27 (2022). <https://doi.org/10.1007/s13370-022-00964-3>
11. M. Koussour et al., Late-time acceleration in $f(Q)$ gravity: Analysis and constraints in an anisotropic background, *Annals of Physics* 445, p.169092 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.aop.2022.169092>
12. M. Koussour, S.H. Shekh, M. Bennai, Cosmic acceleration and energy conditions in symmetric teleparallel $f(Q)$ gravity, *Journal of High Energy Astrophysics* 35, p.43-51 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.jheap.2022.05.002>
13. M. Koussour et al., Quintessence Universe and cosmic acceleration in $f(Q,T)$ gravity, *International Journal of Modern Physics D*. 31, p.2250115 (2022). <https://doi.org/10.1142/S0218271822501152>
14. N. Myrzakulov et al., Constraining the $f(R,T)=R+2\lambda T$ cosmological model using recent observational data, *Chinese Physics C* 47, p.115107 (2023). <https://doi.org/10.1088/1674-1137/acf2fa>
15. B.S. Goncalves, P. Moraes, B. Mishra, Cosmology from Non-Minimal Geometry-Matter Coupling, *Fortschritte der Physik*. 71, p.2200153 (2023). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.05918>
16. M. Koussour, A. De, Observational constraints on two cosmological models of $f(Q)$ theory, *The European Physical Journal C*. 83, p.400 (2023). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.11765>
17. M. Koussour et al., A New Parametrization of Hubble Parameter in $f(Q)$ Gravity, *Fortschritte der Physik*. 71, p.2200172 (2023). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.04723>
18. M. Koussour et al., Constant sound speed and its thermodynamical interpretation in $f(Q)$ gravity, *Nuclear Physics B*. 990, p.116158 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2023.116158>
19. M. Koussour et al., Thermodynamical aspects of Bianchi type-I Universe in quadratic form of $f(Q)$ gravity and observational constraints, *Journal of High Energy Astrophysics*. 37, p.15-24 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.jheap.2022.11.002>
20. N. Myrzakulov et al., Cosmological implications of the constant jerk parameter in $f(Q,T)$ gravity theory, *Chinese Journal of Physics*. 86, p.300-312 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2023.10.001>
21. K. El Bourakadi et al., Constant-roll and primordial black holes in $f(Q,T)$ gravity, *Physics of the Dark Universe*. 41, p.101246 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.dark.2023.101246>
22. T. Vinutha, V.V. Kuncham, S.K. Kolli, The study of anisotropic perfect fluid cosmological models in $f(R,T)$ gravity, *General Relativity and Gravitation*. 55, p.64 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10714-023-03112-9>
23. N. Myrzakulov, M. Koussour, D.J. Gogoi, A new $Om(z)$ diagnostic of dark energy in general relativity theory, *The European Physical Journal C*. 83, p.594 (2023). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11794-3>
24. M. Koussour et al., Observational constraints on the equation of state of viscous fluid in $f(R,T)$ gravity, *Physics of the Dark Universe*. 46, p.101577 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.dark.2024.101577>
25. M. Koussour et al., Constraints on bulk viscosity in $f(Q,T)$ gravity from $H(z)$ /Pantheon+ data, *Physics of the Dark Universe*. 45, p.101527 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.dark.2024.101527>

26. M. Koussour et al., Exploring accelerated expansion in the universe: A study of $f(Q,T)$ gravity with parameterized EoS and cosmological constraints, Chinese Journal of Physics. 90, p.108-120 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2024.04.024>

Авторлар туралы мәлімет:

Жадыранова А.А. – PhD, жалпы және теориялық физика кафедрасының аға оқытушысы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Мұнайтпасов көшесі 13, Астана, Қазақстан.

Исмаил Ү.Қ. – хат-хабар авторы, жалпы және теориялық физика кафедрасының магистранты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Мұнайтпасов көшесі 13, Астана, Қазақстан.

Сноу У.М. – PhD, физика кафедрасының профессоры, Блумингтон қаласындағы Индиана университеті, Шығыс 3-көшесі 47405, Блумингтон, АҚШ.

Жумабекова В.Н. – PhD, физика кафедрасының қауымдастырылған профессоры, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Достық даңғылы 13, Алматы, Қазақстан.

Жусупова Н.К. – PhD докторант, физика кафедрасы, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Достық даңғылы 13, Алматы, Қазақстан.

Жадыранова А.А. – PhD, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилёва, ул. Мунайтпасова, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Исмаил Ү.Қ. – автор для корреспонденции, магистрант кафедры общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилёва, ул. Мунайтпасова 13, Астана, 010008, Казахстан.

Сноу У.М. – PhD, профессор кафедры физики, Университет Индианы в Блумингтоне, ул. Восточная 3-я, 47405, Блумингтон, США.

Жумабекова В.Н. – PhD, ассоциированный профессор кафедры физики, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, просп. Достык 13, 050000, Алматы, Казахстан.

Жусупова Н.К. – докторант PhD кафедры физики, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, просп. Достык 13, 050000, Алматы, Казахстан.

Zhadyranova A.A. – PhD, Senior Lecturer, Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Munaitpasova Street, Astana, 010008, Kazakhstan.

Ismail U.K. – the corresponding author, Master’s student, Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Munaitpasova Street, Astana, 010008, Kazakhstan.

Snow W.M. – PhD, Professor, Department of Physics, Indiana University Bloomington, East 3rd Street, 47405, Bloomington, USA.

Zhumabekova V.N. – PhD, Associate Professor, Department of Physics, Abai Kazakh National Pedagogical University, 13 Dostyk Ave., 050000, Almaty, Kazakhstan.

Zhusupova N.K. – Doctoral student, Department of Physics, Abai Kazakh National Pedagogical University, 13 Dostyk Ave., 050000, Almaty, Kazakhstan.



Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).