Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің ХАБАРШЫСЫ.
ISSN: 2616-6836. eISSN: 2663-1296

ФИЗИКА СЕРИЯСЫ/ PHYSICS SERIES / СЕРИЯ ФИЗИКА

ХҒТАР 29.05.15 https://doi.org/10.32523/2616-6836-2026-154-1-124-136
ғылыми мақала

Ашық кванттық жүйелердің динамикасын Ли топтары мен алгебралары арқылы зерттеу

Т.Б. Қоштыбаев[1], А.К. Ершина[1]*, А.М. Татенов[1], А.Т. Жавлиева[1], М.Е. Алиева[2]

[1]Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан, [2]Абай атындағы Казақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

(E-mail: koshtybayev70@mail.ru, 50ershina@gmail.com, a.tatenov1@gmail.com, zhavliyeva.11@gmail.com, moldir-2008@mail.ru)

Аңдатпа. Мақалада кванттық жүйелердің күйлерін, үзіліссіздік және симметриялылық қасиеттерін тығыздық матрицасы арқылы сипаттауға арналған теориялық зерттеулер ұсынылған. Операторлар, олардың коммутациялары Ли топтары мен алгебралары арқылы өрнектелді. Тығыздық матрицасына арналған Нейман немесе Лиувилдің кванттық теңдеуін стационар гамильтониан үшін шешу арқылы жүйедегі барлық оқиғалардың себептеріне Ли алгебралары тұрғысынан талдаулар жасалды. Тығыздық матрицасының уақытқа тәуелділігінен бақыланушылар тәуелділігіне өту арқылы бақыланушылардың Гейзенбергтік көріністегі динамикасына арналған және бақыланушылардың Ли алгебрасын өзгертпейтін унитарлы теңдеулерге қол жеткізілді. Линдблад теңдеуін стационарлы супер оператор үшін шешу арқылы қоршаған ортамен әлсіз әсерлесетін ашық кванттық жүйелердің динамикасына жан–жақты баға берілді. Қоршаған ортамен әсерлесетін кванттық әлемнен классикалық әлемге өту мүмкіндігі Блох шарының сығылуы арқылы көрсетілді. Лидің бір алгебрасынан басқа бір алгебрасына көшу жағдайлары нақтыланды. Линдблад теңдеуі және оның шешімі Гелл–Манн матрицасы үлгісінде жазылды. Есептеулер кезінде ішкі алгебралардың базистері мен генераторларының арасындағы байланыстар төрт өлшемді жағдайға сәйкестендірілді. Уақыт айнымалысының үлкен мәндері үшін тығыздық матрицасының сығыла алатын аймағының математикалық нұсқасы анықталды.

Түйін сөздер: алгебра, топтар, кванттық ашық жүйе, тығыздық матрицасы, операторлар, симметрия, үзіліссіздік, күйлер

Жіберілді 14.01.2026. Өзгертілді 7.02.2026. Қабылданды 25.02.2026. Онлайн қол жетімді 30.03.2026.

*хат-хабар авторы

Кіріспе

Топтар мен симметриялар теориясы математикалық физиканың есептеу, зерттеу, талдау аппараты ретінде теориялық физикадағы маңызды құбылыстарды зерттеу құралына айналып отыр. Элементар бөлшектер физикасындағы, космологиядағы және осы секілді басқа да ғылыми салалалардағы (бағыттардағы) үздіксіз симметрияларды зерттеуде Лидің топтары мен алгебралары маңызды рөл атқаруда. Релятивистік физиканың негізін Лоренц және Пуанкере топтары құраса, элементар бөлшектердің заманауи теориясы калибрлеуші топтағы калибрлік симметрияны басшылыққа алады. Ли алгебраларының қалыптасу қарқыны Ли топтарының дамуына байланысты болады. Ли алгебралары мен топтарының теориясын 1870 жылы норвегиялық математик Софус Ли (1842–1899) қалаған болатын, алайда бұл теорияға мұндай атты (атауды) 1934 жылы неміс математигі Герман Вейл берді. Бұған дейін бұл теория «топтың инфиниттік түрлендірулері» деген атпен белгілі болған. Софус Ли дифференциалдық теңдеулер үшін Эверис Галуаның алгебралық теңдеулерге арнап жасаған теориясына ұқсас өзіндік ерекшелігі бар теория жасағысы келді. Оның осы бағытта атқарған қажырлы еңбектерінің нәтижесінде дүниеге Ли топтарының теориясы келді. Ли әртүрлі сипаттағы (ерекшеліктегі) дифференциалдық теңдеулерді интегралдауға арналған арнайы әдістерді талдай келе мынадай қорытындыға тоқталды: бұл әдістердің барлығы да шын мәнісінде интегралдаудың жалпыламалы тәсілінің дербес жағдайлары болуы мүмкін [1,2]. Ли топтарының концепциясы математика мен жаратылыстың *үзіліссіздік* және *симметриялылық* атты фундаменталды (іргелі) екі идеяларын тоғыстырды. Сонымен бірге, Ли алгебралары-базистік элементтері коммутация немесе антикоммутация ережелеріне бағынатын алгебра.

Кванттық механикадағы ашық жүйе деп сыртқы ортамен энергия және зат алмаса алатын жүйені айтады. Жүйе ашық болуы үшін тағы бір маңызды шарт орындалуы тиіс, ол–яғни жүйенің динамикасына қатысты кез-келген бір бақыланушы шаманы өлшеу әрекеттері осы жүйенің кванттық күйінің қайтымсыз өзгерістерімен байланыста болуы. Сондықтан да, ашық жүйелердің кванттық теориясында кванттық өлшеулердің орны ерекше. Классикалық механикада өлшеулер аса бір маңызға ие емес. Ашық жүйелер гамильтонды және гамильтонды емес болып бөлінеді. Гамильтондық жүйелердің даму қарқыны толықтай оның гамильтонианымен анықталады. Мұндай жүйелер унитарлы операторлардың бір параметрлі тобы арқылы сипатталады. Қозғалыс теңдеулері ретінде Нейман және Гейзенберг теңдеулері қолданылады. Сыртқы әсерлердің ықпалындағы маркты гамильтонды емес кванттық жүйелердің динамикасы Линдблад теңдеуімен анықталады.

Кеңістік – уақыт пен бөлшектердің түрленуі кезінде кванттық механика теңдеулерінің өзгеріссіз қалуы кванттық механикадаға *симметриялар* деп аталады. Жалпы алғанда, физикадағы симметрияларға, инварианттылық пен сақталу заңдарына физикалық теориялар мен модельдерді жасау кезіндегі шектеулер ретінде қарайтыны жасырын емес. Ал, іс жүзінде бұлар – мәселені шешудің және нақтылы бір нәтижені болжаудың таптырмас тәсілдері. Сақталу заңдары мәселені түбегейлі шешіп бере алмағанымен, шешуге қатысты ережелер мен шектеулерді ұтымды пайдалануға бағыт-бағдар береді.

Соңғы уақытты элементар бөлшектер физикасын симметриялық тұрғыда зерттеу шындап қолға алынған, яғни физиканың бұл саласына Ли топтары мен алгебраларын қолданылуы үздіксіз симметриялы құбылыстардың жан-жақты зерттелуіне жол ашты. Кванттық механикадағы кеңістіктктік айналу мен уақыт бойынша ығысуды үзіліссіз симетриялар қатарына жатқызуға болады. Ли алгебралары – Ли топтарының сызықтық жуықталған кейіпі (үлгісі), ол математикалық есептеулерді ықшамды, әрі оңтайлы жүргізуге мүмкіндік береді. Кванттық механикадағы импульс және бұрыштық момент операторлары Ли алгебрасының генераторлары ретінде бақыланатын шамалармен байланысы бар. Ал, Ли топтары болса кванттық күйлерді симметриялық қасиеттеріне қарай кластарға бөліп бере алады. Мысалы, айналу (айналыс) топтары атомдар мен ядролардың сфералық симметрияларын зерттесе, Пуанкере топтары релятивистік кванттық механикадағы бөлшектің жай-күйін қарастырады. Кванттық механикадағы бұрыштық момент SO(3) айналыс топтары арқылы сипатталады. Сонымен бірге, Ли топтары кванттық сандар мен энергия деңгейлерін анықтайтын симметриялармен айналысатын болғандықтан, олар арқылы атомдар мен ядролардың спектрлерінің құрылымын түсіндіре аламыз. Өрістердің кванттық теориясында Ли топтары лагранжиандардың симметриясын сипаттауда және элементар бөлшектерді кластарға бөлу мақсатында қолданылады. Олай болса, Лидің алгебралары мен топтарын кванттық жүйелер мен олардың әсерлесулерін терең түсінуге мүмкіндік (пәрмен) беретін құдіретті математикалық аппарат ретінде тануға болады екен. Байланысқан күйлер спектрлерінің кулондық тарту өрісінде квантталуын және үш өлшемді изотропты осциллятордың кванттық күйлерінің симметрия топтары көрінісінде сипатталуын Ли алгебрасының кванттық физикадағы қолданысының тағы бір көрінісі деп қабылдау керек. Кванттық жүйедегі симметриялар мен заңдылықтар көбіне операторлар алгебрасы арқылы өрнектеледі, бұл қадам олардың динамикасы мен қасиеттерін қозғалыс теңдеулерін шешпей-ақ зерттей беруге жағдай жасайды. Осы келтірілген жағдайлар мен мақаланың тақырыбы бойынша төменде келтірілген бірқатар тың мәселелер қарастырылып, шешілетін болады:

– кванттық жүйелердің күйлерін, үзіліссіздік және симметриялылық қасиеттерін тығыздық матрицасы арқылы сипаттау;

– жүйелердегі симметрияларды, операторларды, коммутацияларды Ли топтары мен алгебралары арқылы зерттеу;

– тығыздық матрицасына аралған Нейман немесе Лиувилдің кванттық теңдеуін стационарлы гамильтониан жағдайында шешу арқылы жүйедегі оқиғалардан ақпараттар алу;

– оқиғалардың себептеріне Ли алгебрасы арқылы талдаулар жасау;

– тығыздық матрицасының уақытқа тәуелділігінен бақыланушылар тәуелділігіне ауысу арқылы бақыланушылардың Гейзенбергтік көріністегі динамикасын сипаттайтын және бақыланушылардың Ли алгебрасын өзгертпейтін унитарлы теңдеулерге қол жеткізу;

– ашық кванттық жүйелердің динамикасын Линдблад теңдеуін супер оператор жағдайында шешу;

– ашық кванттық әлемнен классикалық әлемге өтуді Блох шарының сығылуы арқылы түсіндіру;

– Лидің бір алгебрасынан екінші бір жаңа алгебраға көшу жағдайларын көрсету, Линдблад теңдеуі мен оның шешімін Гелл-Манн матрицасы үлгісінде жазу.

– ішкі алгебралардың базистері мен генераторларының арасындағы байланыстарды төрт өлшемді жағдайға сәйкестендіру.

Әдіснама

Ли топтары мен алгебраларының физикадағы, математикадағы және химиядағы симметрияларды сипаттауын, талдауын зерттеу әдіснамасына жатқызуға болады. Осылармен бірге, атомдық және субатомдық деңгейдегі құбылыстарды модельдеу, импульс пен энергия секілді бақыланатын шамаларға қатысты еептеулерді жүргізу және еркіндік дәрежелерінің саны үлкен болып келген жүйелерге өрістің кванттық теориясын қолдану мәселелері де Ли топтары мен алгебраларының қолданылу әдіснамасына кіреді. Топтардың жалпы теориясы молекулалық құрылымдар мен кристалдық торлардың кластарын қарастырса, Ли топтары дифференциялдық теңдеулер мен көпқырлылықтарды және теориялық физикадағы заңдылықтарды басқарып отыратын симметрияларды сипаттау мақсатында қолданылады. Кванттық механикадағы алгебралық тәсілдер қатарына кванттық жүйелерді сипаттайтын гильберттік кеңістіктерге ұқсайтын алгебралық құрылымдарды жатқызуға болады. Кванттық механикада Ли топтары жүйенің эволюциясын сипаттайтын унитарлы (тұтас) түрлендірулер рөлін, ал Ли алгебралары бақыланатын физикалық шамалар мен олардың түрленуіне сәйкес келетін эрмиттік операторлар қызметін атқарады. Орбитадағы электрондардың жүйесі, электрондардың пайда болуы мен жойылуына қатысты операторлардың арасындағы коммутациялық қатынастыр Ли алгебрасының негізгі зерттеу нысандарына жатады [3]. Бұл жерде коммутаторлар классикалық механикадағы Пуассон жақшаларының кванттық үлгісі болып табылады. Ли алгебрасы мен Ли топтарының арасында exp(A) түрдегі экспоненттік байланыс бар, мұндағы А-Ли алгебрасының элементі (эрмиттік матрица), ал осы байланыстың нәтижесінде Ли тобының элементі (унитарлы матрица) пайда болады. Кванттық есептеулерде Ли топтары мен алгебралары кубиттердің күйлерін басқару үшін қолданылады. Ли алгебрасы унитарлы операторлар жиынын құрастыруға жағдай жасайды, ал олар өз кезегінде кванттық алгоритмдердің орындалуын іске асырады. Олай болса, Ли алгебраларын үздіксіз симметриясы бар кванттық жүйелерді зерттеуге қолданылатын математикалық аппарат деп және кванттық есептеулерде кванттық алгоритмдерді жасау, талдау құралы деп қабылдауға болады екен.

Нәтижелер мен Талқылау

Саны жағынан өте көп құбылыстарды жан-жақты сипаттай алатын ең алғашқы іргелі физикалық теория – классикалық механика. Ал, кванттық механика болса осындай құбылыстардың өрісін кеңейтіп берді. Кванттық әлемді сиапттау тәсілдерінің барлығының да өзіндік ерекшелігі болғанымен, солардың ішінде тығыздық матрицасының алатын орны бөлек десе болады. Оның элементі (құрамдас бөлігі) ретінде қандай да бір көп өлшемді нысанды қарастыруға болады. Мысалы, сфера арқылы Блох кубитінің күйлерін сипаттай алатын болсақ, онда классикалық әлем осы сфера ішіндегі z бағытта тартылған кесіндіге және тығыздық матрицасының диагоналды элементтеріне сәйкес келетін болады. Ал, сфераның барлық қалған бөлігі кванттық әлемге тиесілі. Матрицаның диагоналды емес элементтері арқылы сипатталатын әртүрлі күйлердің суперпозициялануы – кванттық теорияның өзіне ғана тән ерекшелік.

Физикада дүниеге келген жаңа теорияда ескі теория шекті жағдай ретінде отырады. Кванттық және классикалық механиканың математикалық аппараттарын байланыстыру үшін $\hbar \to 0$ шартынан басқа Ли алгебралары арқылы сипатталатын шекті жағдайлар да бар. Тұйық жүйелер үшін шредингерлік көріністегі тығыздық матрицасы фон Нейман теңдеуі немесе кванттық жүйенің суперпозиция, коммутаттылық емес және т.с.с. қасиеттерін қасиеттерін толықтай сақтайтын Лиувилл теңдеуі арқылы анықталады:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{\iota}{\hbar}[\rho(t), H] = L(t)\rho(t) \tag{1}$$

мұндағы $L(t) -$ Лиувиллдің супероператоры [4]. Егер, H гамильтониан уақытқа тәуелді болмаса, онда (1)-дің шешімі

$$\rho(t) = Y(t)\rho(0)Y^*(t) = \Omega_t\rho(0) = \exp(Lt)\rho(0) \tag{2}$$

Бұл шешімде $Y(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)$ және $\Omega = \exp(Lt)$. Тығыздық матрицасының уақытқа тәуелділігін бақыланушылар тәуелділігіне аудару арқылы бақыланушылардың Гейзенбергтік көріністегі динамикасына қол жеткізетін боламыз:

$$\dot{\Gamma}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, \Gamma(t)] = L^*(t)\Gamma(t) \tag{3}$$

$$\Gamma(t) = Y^*(t)\Gamma(0)Y(t) = \Omega^*(t)\Gamma(0) = \exp(L^*t)\Gamma(0) \tag{4}$$

Осы жазылған унитарлық (тұтас) теңдеулер бақыланушылардың Ли алгебрасының түр-сипатын өзгертпейді.

Қоршаған ортамен әлсіз әсерлесулерге түсетін ашық кванттық жүйелердің динамикасы Лиувилл теңдеуінен алынатын төмендегі Линдблад теңдеуімен көрсетіледі:

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H] + \sum_k \upsilon_k \left\{V_k\rho V_k^* - \frac{1}{2}(V_kV_k^*, \rho)\right\} = L(t)\rho(t) \tag{5}$$

Байқап отырғанымыздай, (5) – теңдеу (1) – теңдеудің оң жағына (ашық жүйелердің динамикасының тұтастылығына сәйкес келетін бөлігіне) динамиканың шашыраңқылығына жауап беретін мүшелерді қосу арқылы алынған. Теңдеудегі V_k– Линдблад операторлары болғандықтан, L–Линдбладтың супер операторлары деп аталатын болады, υ_k–жүйедегі әртүрлі әлсіреулерге сәйкес келетін релаксациялар жылдамдығы. L–дің стационарлы (уақытқа тәуелсіз) жағдайына сәйкес келетін (5)-теңдеудің шешімін (2)-секілді кейіпте жазуға болады:

$$\rho(t) = \Omega_t \rho(0) = \exp(Lt)\rho(0) \quad (6)$$

Қоршаған ортамен әсерлесулер кванттық қасиеттердің жойылуына жеткізеді де ашық жүйеде классикалық заңдылықтар орын ала бастайды. Бұл жағдай тығыздық матрицасындағы диагоналды емес элементтердің нөлге айналуына және бақыланушылар алгебрасына қосымша абельді ішкі алгебралардың қосылуына себеп болады. Осы келтірілген тұжырымдарға мысал келтіру арқылы түсініктеме жасап өтейік: (1)-теңдеу екі деңгейлі жүйенің бастапқы күйлерін айналдыра отырып, оның z осьіне (классикалық әлемге) жақындап кетпеуін қадағалап отырады [5, 6]; ал (5)-теңдеу болса бастапқы кванттық күйлерді z осьіне барынша жақындата отырып, оны классикалық күйге айналдырады. Олай болса, Лидбладтың (5) және (6) түрлердегі теңдеулері арқылы сипатталатын ашық кванттық жүйелердің динамикасы кванттық әлемді (Блох шары) классикалық жағдайға (z осьіндегі кесіндіге) дейін сығады (контракция). Ли алгебраларының (топтарының) кеңістіктік контракциясы да топтың құрылымдық тұрақтыларының сығылуы түрінде байқалады, бұл жағдай коммутаторлардың нөлденуіне әкеліп соғады. Олай болса, қоршаған ортамен әсерлесетін кванттық әлемнен классикалық әлемге өту мүмкіндігін контракция тілінде түсіндіруге болады екен.

Гейзенбергтік бейнеде A бақыланушылар үшін Линдблад теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar}[H, A] + \sum_k \upsilon_k \left\{ V_k^* A V_k - \frac{1}{2}(V_k^* V_k, A) \right\} = L^*(t)A(t) \quad (7)$$

$$A(t) = \Omega_t^*(A) = \exp(L^* t)A(0) \quad (8)$$

(8)-ге сәйкес келетін коммутациялық қатынастардың уақыт бойынша өзгерістері төмендегідей:

$$\left[A_i, A_j\right]_t \equiv (\Omega_t^*)^{-1}[\Omega_t^*(A_i), \Omega_t^*(A_i)] \equiv C_{ij}^k(t) A_k \quad (9)$$

Бастапқы алгебра жаңаланатын $t \to \infty$ шартында бастапқы Ли алгебрасының контракциясы деп аталатын төмендегі өрнек шығады:

$$\left[A_i, A_j\right]_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} \left|A_i, A_j\right|_t = C_{ij}^k(\infty) A_k \quad (10)$$

g белгілеуіндегі Ли алгебра құрамынан g_0 құрылымдық алгебрасын бөліп алайық, ал құрылымдағы қалған генераторлар g_1 ішкі жиынын құрайтын болсын. Жалпы сипаттағы коммутациялық қатынастарды мына түрде көрсетуге болады [7–9]:

$$[g_0, g_0] = g_0, \;\; [g_0, g_1] = g_0 + g_1, \;\; [g_1, g_1] = g_0 + g_1 \quad (11)$$

g_1–гі барлық генераторларды θ–ға көбейтейік:

$$[g_0, g_0]_\theta = g_0,\ [g_0, g_1]_\theta = \theta g_0 + g_1,\ [g_1, g_1]_\theta = \theta^2 g_0 + \theta g_1 \tag{12}$$

$\theta \to 0$ шартында жаңа Ли алгебрасына өтеміз, оған сәйкес келетін коммутациялық қатынастар төмендегідей кейіпті қабылдайды:

$$[g_0, g_0]_0 \in g_0,\ [g_0, g_1]_0 =\in g_1,\ [g_1, g_1]_0 = 0 \tag{13}$$

Лидің $su(3)$ алгебрасындағы генераторлардың диагоналды түрлендірулерін Гелл-Манн матрицасы үлгісінде беруге болады:

$$\tilde{\delta} = M_\theta \delta \tag{14}$$

Мұндағы $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s)^\varphi$, δ_i–Гелл–Манн матрицалары, M_θ–диагоналдарында θ_i параметрлері ғана тұратын диагоналдық матрица. Үш деңгейлі жүйелер (кутрита) мен Лидің $su(3)$ алгебрасын қолдана отырып Линдблад теңдеуінің шешімдерін Гелл-Манн матрицасы кейіпіне келтіруге болады. Бұл жерде g_1 жиынындағы бақыланушылар өздерінің кванттық қасиеттерін жойып, абельдік ішкі алгебра құрайтын болады. Ал, g_0 құрылымындағы бақыланушылар болса сыртқы әсерге төзімділік қасиет көрсете отырып өзгеріссіз қала береді. $su(3)$-тен бір өлшемді g_0 алгебраны таңдап алу кезінде осы алгебраға кіретін тығыздық матрицасы тек стационар күйлерге ғана қатысты болады. Лиувилдің супер операторының (L, L^*) меншікті мәндерінде (ℓ) релаксация жылдамдықтары, диссипатция процестері және декогеренттілік туралы мәліметтер болғандықтан, олар жүйенің ең маңызды физикалық қасиеттерін анықтап бере алады [10, 11]. (5) және (7) түрлердегі Линдблад теңдеулерін (13)–контракциясында жазу үшін g_0 ретінде базисі $\lambda_3, \lambda_8, \lambda_6, \lambda_7$ түрдегі 4 өлшемді $g_0 = E(1) + su(2)$ ішкі алгебраны аламыз, ал g_1-гі генераторлар рөлін $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5$ Гелл-Манн матрицалары атқарады. M_θ контракциясының түрленуі төмендегідей түрде орындалады:

$$M_\theta g = g_0 + \theta g_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23}^* & a_{33} \end{vmatrix} + \theta \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12}^* & 0 & 0 \\ a_{13}^* & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{15}$$

Нәтижеде, осы түрлендіруге сәйкес келетін тығыздық матрицасына арналған Линдблад теңдеуі мен оның шешімі мынадай болады [12]:

$$\dot{\rho} = -v \begin{vmatrix} 0 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 0 & 0 \\ \rho_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad \rho(t) = \begin{vmatrix} \rho_{11}(0) & e^{-vt}\rho_{12}(0) & e^{-vt}\rho_{13}(0) \\ e^{-vt}\rho_{21}(0) & \rho_{22}(0) & \rho_{23}(0) \\ e^{-vt}\rho_{31}(0) & \rho_{32}(0) & \rho_{33}(0) \end{vmatrix} \tag{16}$$

Уақыттың үлкен мәндерінде тығыздық матрицасы сыртқы әсерлерге төзімді

$$g_0 = E(1) + su(2) \tag{17}$$

аймаққа дейін сығыла алады.

Қорытынды

Мақалада көтерілген мәселелер, олардың шешілу әдістері және алынған нәтижелер ұсынылып отырған тақырыптың өзектілігін айғақтайды. Тақырып аясында авторлар ұжымы орындалған ауқымды математикалық есептеулерді соңғы уақыттағы заманауи зерттеулермен ұштастыру арқылы кванттық ашық жүйелердің динамикасын дамытуға өздерінің де үлестерін қоса білді деген сенімдеміз. Ли топтары мен алгебраларын кванттық жүйеге қолдану арқылы ондағы бірқатар симметриялық қасиеттерді жан-жақты түсіндіруге болатындығы дәлелденді. Осы бағытта мынадай нақтылы нәтижелерге қол жеткізілді: жүйелердегі симметриялар, операторлар және олардың өзара коммутацияларды Ли топтары мен алгебралары арқылы зерттелді; тығыздық матрицасына аралған Нейман, Лиувилдің теңдеулері стационар жағдайлар үшін шешіліп, сол арқылы жүйедегі процестерден мәліметтер алынды; тығыздық матрицасының уақытқа тәуелділігінен бақыланушылар тәуелділігіне өту арқылы Гейзенбергтік көріністегі унитарлы теңдеулер шығарылып көрсетілді; ашық кванттық жүйелердің динамикасы Линдблад теңдеуі арқылы зерттелді; кванттық әлемнен классикалық ортаға өту жағдайлары Блох шарының сығылуы арқылы қарастырылдыу; Ли алгебралары арасындағы байланыстардың механизмдері зерделеніп, Линдблад теңдеуі мен оның шешімін Гелл-Манн матрицасы үлгісіне келтіру іске асырылды; ішкі алгебралардың базистері мен генераторларының арасындағы байланыстар төрт өлшемді жағдайға негізінде жасалды. Алынған осы теориялық нәтижелерді алгебраға негізделеген алгоритмдік әдістерде, кванттық технологиялар мен есептеулерде, көп кубитті кванттық жүйелерде қолдануға болады. Ең бастысы, бұл нәтижелер ашық кванттық жүйелер динамикасын зерттеу модельдерін жасау кезінде өзіндік септігін тигізе алады.

Авторлардың қосқан үлесі.

Т.Б. Қоштыбаев – кванттық жүйелердің күйлеріне, үзіліссіздік пен симметриялылық қасиеттеріне тығыздық матрицасы арқылы сипаттау мәселесін қойып, оның шешілу жолдарын ұсынушы. Тығыздық матрицасына аралған Нейман немесе Лиувилдің кванттық теңдеуін стационар гамильтониан үшін шешті, сол арқылы жүйедегі барлық оқиғалардың себептеріне Ли алгебрасы арқылы талдаулар жасады. Тығыздық матрицасының уақытқа тәуелділігінен бақыланушылар тәуелділігіне өту арқылы бақыланушылардың Гейзенбергтік көріністегі динамикасын сипаттайтын және бақыланушылардың Ли алгебрасын өзгертпейтін унитарлы теңдеулерін алуға атсалысты. Ілеспе хатты әзірлеп, редакцияға жолдауды іске асыруға басшылық жасаған.

А.К. Ершина – тығыздық матрицасының уақытқа тәуелділігінен бақыланушылар тәуелділігіне өту арқылы бақыланушылардың Гейзенбергтік көріністегі динамикасын сипаттайтын, әрі бақыланушылардың Ли алгебрасын өзгертпейтін унитарлы теңдеулерді алуға арналған есептеулерді орындады. Қоршаған ортамен әлсіз әсерлесетін ашық кванттық жүйелердің динамикасы Линдблад теңдеуін стационарлы супер оператор үшін шешті. Әдебиеттерді іріктеу жұмыстарына басшылық жасаушы. Операторлардың коммутацияларын Ли топтары мен алгебралары арқылы жүзеге асыруды орындаған.

А.М. Татенов – қоршаған ортамен әлсіз әсерлесетін ашық кванттық жүйелердің динамикасы Линдблад теңдеуін стационарлы супер оператор үшін шешуге атсалысты. Әдебиеттерді іріктеугк көмектесті. Мәтіндегі математикалық өрнектерді тексерді.

А.Т. Жавлиева – қоршаған ортамен әлсіз әсерлесетін ашық кванттық жүйелердің динамикасы Линдблад теңдеуін стационарлы супер оператор үшін шешуге атсалысты, шешімнің шарттарын тексерді. Әдебиеттерді іріктеу жұмыстарына басшылық жасаушы. Операторлардың коммутацияларын Ли топтары мен алгебралары арқылы жүзеге асыруды орындаған.

М.Е. Алиева – есептеулер кезіндегі ішкі алгебралардың базистері мен генераторларының арасындағы байланыстар төрт өлшемді жағдайға сәйкестендірді. Уақыт айнымалысының үлкен мәндері үшін тығыздық матрицасының сығыла алатын аймағының математикалық нұсқасын анықтауға атсалысты. Мақаланың талапқа сай рәсімделуін орындап, аңдатпаның орыс және ағылшын мәтіндерін жазды, әдебиеттер тізімінің ағылшын нұсқасын жасады және мақаланы сайт арқылы редакцияға жолдады.

Әдебиеттер тізімі

1. С.Н. Торгаев, И.Д. Шульга, Е.А. Юрченко, М.Л. Громов, Основы квантовых вычислений (STT, Томск, 2020), с. 100.

2. Е.В. Мещерина, А.Н. Благовисная, О.А. Пихтилькова, Развитие теории алгебры Ли, Вестник Омского университета, №1, с.4-11 (2022). https://www.doi.org/%2010.24147/1812-3996.2022.27(1).4-11

3. Э.В. Киссин, В.С. Шульман, О представлениях групп и алгебр в пространствах с индефинитной метрикой, Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, №2, с.295-315 (2021). https://doi.org/10.22363/2413-3639-2021-67-2-295-315

4. В.В. Варламов, Алгебраическая квантовая механика, Математические структуры и моделирование, №2, с.4-23 (2020). https://doi.org/10.24147/2222-8772.2020.2.4-23

5. В.В. Варламов, Алгебраическая квантовая механика, Математические структуры и моделирование, №3, с.4-24 (2021). https://doi.org/10.24147/2222-8772.2021.3.4-24

6. В.В. Горбацевич, Основы теории Ли для Е-структур и некоторые ее применения, Известия РАН. Серия Математика, №2, с.34-61 (2022). https://doi.org/10.4213/im9115

7. A.A. Premet, D.I. Stewart, Classification of the maximal subalgebras of exceptional Lie algebras over fields of good characteristic, Journal of the American Mathematical Society 32 (4), p.965-1008 (2019). https://doi.org/10.1090/jams/926

8. А.В. Сюракшин, В.Д. Лахно, В.Ю. Юшанхай, Компьютерное моделирование переноса заряда в молекуле ДНК в рамках простой модели открытой квантовой системы, Математическая биология и биоинформатика, № 19, с.212-231 (2024). https://doi.org/10.17537/2024.19.212

9. T. Yoneya, K. Fujimoto, Y. Kawaguchi, Path-integral formulation of truncated Wigner approximation for bosonic Markovian open quantum systems, Annals of Physics 479, No 170072 (2025). https://doi.org/10.1016/j.aop.2025.170072

10. H. Triviño, F. Mesa, V.A. Ballesteros, Quantification of memory effects in topological two-band open quantum systems, Heliyon 22(10), No e40552 (2024). https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e40552

11. J. Polonyi, Action for classical, quantum, closed and open systems, Annals of Physics 467, No 169694 (2024). https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169694

12. E.V. Karachanskaya, Programmed control with probability 1 for stochastic dynamical systems, Journal of Mathematical Sciences 248 (1), p.67-79 (2020). https://doi.org/10.1007/s10958-020-04856-4

Т.Б. Коштыбаев[1] , А.К. Ершина[1]*, А.М. Татенов[1], А.Т. Жавлиева[1], М.Е. Алиева[2]

[1] Казахский национальный женский педагогический университет , Алматы, Казахстан

[2]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан

(E-mail: koshtybayev70@mail.ru, 50ershina@gmail.com, a.tatenov1@gmail.com, zhavliyeva.11@gmail.com, moldir-2008@mail.ru)

Исследование динамики открытых квантовых систем с использованием групп и алгебр Ли

Аннотация. В статье предложены подходы описания состояний квантовых систем, свойств непрерывности и симметрии через матрицу плотности, а также исследование симметрий в системах, операторов и их коммутаторов с помощью групп и алгебр Ли. В частности, с помощью решений уравнения Неймана или квантового уравнения Лиувилля для случая стационарного гамильтониана, была получена информация обо всех процессах, происходящих в системе, а также с помощью алгебры Ли были проанализированы причины этих процессов. Переходя от временных зависимостей к зависимостям наблюдаемых были получены унитарные уравнения, описывающие динамику в гейзенберговском представлении, не изменяющие алгебру Ли. Динамика открытых квантовых систем, слабо взаимодействующих с окружающей средой, описаны с помощью решений уравнения Линдблада для стационарного супероператора. Переход от квантового мира, взаимодействующего с окружающей средой, к классическому миру осуществлен через условия сжатия шара Блоха. Были установлены условия переходов от одной алгебры к новой алгебре. Уравнение Линдблада и его решение записаны в образце матрицы Гелл-Манна. Во время расчетов связи между базисами внутренних алгебр и генераторами были приведены к четырехмерному случаю. Для больших значений временной переменной показана математическая формулировка области сжимаемости матрицы плотности.

Ключевые слова: алгебра, группы, квантовая открытая система, матрица плотности, операторы, симметрия, непрерывность, состояния.

T.B. Koshtybayev[1], A.K. Yershina [1]*, A.M. Tatenov[1], A.T. Zhavliyeva[1], M.E. Aliyeva[2]

[1] Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[2]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
(E-mail: koshtybayev70@mail.ru, 50ershina@gmail.com, a.tatenov1@gmail.com, zhavliyeva.11@gmail.com, moldir-2008@mail.ru)

Study of the dynamics of open quantum systems using Lie groups and algebras

Abstract. The paper proposes approaches to the description of quantum system states and to the properties of continuity and symmetry through the density matrix, and explores symmetries in systems, operators, and their commutators using Lie groups and Lie algebras. Specifically, by solving the Neumann equation (or quantum Liouville equation) for a stationary Hamiltonian, information was obtained from all processes occurring in the system, and the underlying causes of these processes were analysed through Lie algebra. By considering the transition from temporal dependencies to the dependence of observables, unitary equations were obtained that describe the dynamics of observables in the Heisenberg representation while preserving the structure of the Lie algebra. The dynamics of open quantum systems weakly interacting with the environment are described through solutions of the Lindblad equation for a stationary superoperator. The quantum-to-classical transition, for a system interacting with its environment, was demonstrated under the condition of Bloch sphere contraction. The conditions for transitions from one algebra to another and for the formation of new algebras were established. The Lindblad equation and its solution were expressed in the Gell-Mann matrix representation. In the course of the calculations, the relations between the bases of internal algebras and generators were reduced to the four-dimensional case. For large values of the time variable, a mathematical formulation of the density matrix contractivity was presented.

Keywords: algebra, groups, open quantum system, density matrix, operators, symmetry, continuity, states.

References

1. Torgaev S.N., Shul'ga I.D., Jurchenko E.A., Gromov M.L. Osnovy kvantovyh vychislenij [Fundamentals of Quantum Computing] (Tomsk, STT, 2020, 100 p.). [in Russian]

2. Meshherina E.V., Blagovisnaja A.N., Pihtil'kova O.A. Razvitie teorii algebry Li [Development of the Theory of Lie Algebras], Vestnik Omskogo universiteta [Bulletin of Omsk University], 1(27), 4-11 (2022). https://doi.org/ 10.24147/1812-3996.2022.27(1).4-11. [in Russian]

3. Kissin Je.V., Shul'man V.S. O predstavlenijah grupp i algebr v prostranstvah s indefinitnoj metrikoj [On Representations of Groups and Algebras in Spaces with an Indefinite Metric], Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 2(67), 295-315 (2021). https://doi.org/10.22363/2413-3639-2021-67-2-295-315 [in Russian]

4. Varlamov V.V. Algebraicheskaja kvantovaja mehanika [Algebraic Quantum Mechanics], Matematicheskie struktury i modelirovanie [Mathematical Structures and Modeling], 2(54), 4-23 (2020). https://doi.org/10.24147/2222-8772.2020.2.4-23 [in Russian]

5. Varlamov V.V. Algebraicheskaja kvantovaja mehanika [Algebraic Quantum Mechanics], Matematicheskie struktury i modelirovanie [Mathematical Structures and Modeling], 3 (59), 4-24 (2021). https://doi.org/10.24147/2222-8772.2021.3.4-24 [in Russian]

6. Gorbacevich V.V. Osnovy teorii Li dlja E-struktur i nekotorye ee primenenija [Fundamentals of Lie Theory for E-Structures and Some of Its Applications], Izvestija RAN. Serija Matematika [Izvestiya of the Russian Academy of Sciences. Mathematics Series], 2(86), 34-61 (2022). https://doi.org/10.4213/im9115 [in Russian]

7. Premet A.A., Stewart D.I. Classification of the maximal subalgebras of exceptional Lie algebras over fields of good characteristic, Journal of the American Mathematical Society, 32 (4), 965-1008 (2019). https://doi.org/10.1090/jams/926

8. Sjurakshin A.V., Lahno V.D., Jushanhaj V.Ju. Komp'juternoe modelirovanie perenosa zarjada v molekule DNK v ramkah prostoj modeli otkrytoj kvantovoj sistemy [Computer simulation of charge transfer in a DNA molecule within a simple model of an open quantum system], Matematicheskaja biologija i bioinformatika [Mathematical Biology and Bioinformatics], 19(1), 212-231 (2024). https://doi.org/10.17537/2024.19.212 [in Russian]

9. Toma Yoneya, Kazuya Fujimoto, Yuki Kawaguchi, Path-integral formulation of truncated Wigner approximation for bosonic Markovian open quantum systems, Annals of Physics, 479, No 170072 (2025). https://doi.org/10.1016/j.aop.2025.170072

10. Triviño H., Mesa F., Ballesteros V.A. Quantification of memory effects in topological two-band open quantum systems, Heliyon, 22 (10), No e40552 (2024). https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e40552

11. Janos Polonyi. Action for classical, quantum, closed and open systems, Annals of Physics, 467, No 169694 (2024). https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169694

12. Karachanskaya E.V. Programmed control with probability 1 for stochastic dynamical systems, Journal of Mathematical Sciences (United States), 248 (1), 67-79 (2020). https://doi.org/10.1007/s10958-020-04856-4

Авторлар туралы мәлімет

Қоштыбаев Т.Б. – физика–математика ғылымдарының кандидаты, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті физика кафедрасының доценті, Әйтеке би көшесі, 99, 050000, Алматы, Қазақстан

Ершина А.К. – хат–хабар авторы, физика–математика ғылымдарының докторы, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті физика кафедрасының профессоры, Әйтеке би көшесі, 99, 050000, Алматы, Қазақстан

Татенов А.М. – физика–математика ғылымдарының кандидаты, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті физика кафедрасының доценті, Әйтеке би көшесі, 99, 050000, Алматы, Қазақстан

Жавлиева А.Т. – педагогика ғылымдарының магистрі, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті физика кафедрасының оқытушысы, Алматы қ., Әйтеке би көшесі, 99, 050000, Алматы, Қазақстан

Алиева М.Е. – жаратылыстану ғылымдарының магистрі, Абай атындағы Казақ ұлттық педагогикалық университеті физика кафедрасының аға оқытушысы, Достық даңғылы, 13, 050000, Алматы, Қазақстан

Коштыбаев Т.Б. – кандидат физико–математических наук, доцент кафедры физики Казахского национального женского педагогического университета, ул. Айтеке би, 99, 050000, Алматы, Казахстан

Ершина А.К. – автор для корреспонденции, доктор физико–математических наук, профессор кафедры физики Казахского национального женского педагогического университета, ул. Айтеке би, 99, 050000, Алматы, Казахстан

Татенов А.М. – кандидат физико–математических наук, доцент кафедры физики Казахского национального женского педагогического университета, ул. Айтеке би, 99, 050000, Алматы, Казахстан

Жавлиева А.Т. – магистр педагогических наук, преподаватель кафедры физики Казахского национального женского педагогического университета, ул. Айтеке би, 99, 050000, Алматы, Казахстан

Алиева М.Е. – магистр естественных наук, старший преподаватель кафедры физики Казахского национального педагогического университета имени Абая, пр. Достык, 13, 050000, Алматы, Казахстан

Koshtybayev T.B. – candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor, Department of Physics, Kazakh National Women's Pedagogical University, Aiteke bi street, 99, 050000, Almaty, Kazakhstan

Yershina A.K. – the corresponding author, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Department of Physics, Kazakh National Women's Pedagogical University, Aiteke bi street, 99, 050000, Almaty, Kazakhstan

Tatenov A.M. – candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor, Department of Physics, Kazakh National Women's Pedagogical University, Aiteke bi street, 99, 050000, Almaty, Kazakhstan

Zhavliyeva A.T. – master of Pedagogical Sciences, lecturer of the Department of physics of the Kazakh National Women's Teacher Training University, Aiteke bi street, 99, 050000, Almaty, Kazakhstan

Aliyeva M.E. – master of sciences, Senior lecturer, Department of Physics, Abai Kazakh National Pedagogical University, Dostyk Ave., 13, 050000, Almaty, Kazakhstan

ISSN: 2616-6836. eISSN: 2663-1296