Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің ХАБАРШЫСЫ.
ISSN: 2616-6836. eISSN: 2663-1296
ФИЗИКА СЕРИЯСЫ/ PHYSICS SERIES / СЕРИЯ ФИЗИКА

ХҒТАР 29.05.15
https://doi.org/10.32523/2616-6836-2026-154-1-199-211
Ғылыми мақала

Қозғалыс және өріс теңдеулерін энергияның сақталу заңынан шығарып алу туралы

Г. Әлімбекова, С.М. Кенесбаев, Г.Т. Тугелбаева*, Э.О. Құткелдиева, Ә.М. Сандыбаева, Д.А. Оңдақанов

Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

(E-mail: alimbek50@mail.ru, kenesbaev-sm@mail.ru, tugelbaevagul5@gmail.com, elzira.kutkeldieva@gmail.com, adema.sandybaeva@bk.ru, dastan_vko99@mail.ru)

Аңдатпа. Аналитикалық механикадағы өзімізге белгілі қозғалыс теңдеулері мен электромагниттік өрістер теориясындағы теңдеулер Лагранж функциясына ең аз принципін қолдану арқылы шығарылып алынған. Ал, ұсынылып отырған мақалада Гамильтон және Лагранж теңдеулерін вариациялық принциптерді қолданбай–ақ алуға болатындығы көрсетілген, яғни жұмыстың мақсаты – қозғалыс және өріс теңдеулерін энергияның сақталу заңынан вариациялық принциптерді қолданбай шығару. Жүйенің энергиясын жалпылама координаталар мен жылдамдықтардың функциясы деп алып жалпылама импульстерді анықтайтын теңдеулер қорытылып шығарылды және де жүйенің кез–келген еркіндік дәрежелерінің өзгерістері кезінде энергияның сақталатындығы дәлелденді. Осы жағдайларды пайдалана отырып толыққанды анықталмаған гамильтонианы бар Гамильтон теңдеулері де шығарылып алынғандығын айта кету керек. Импульстердің координаталар мен жылдамдықтарға тәуелділіктерін сипаттайтын қатынастарды табу үшін алдымен жүйенің энергиясына белгілі шама ретінде қарап, осы арқылы Лагранж функциясы табуға болатындығы да көрсетілді. Осы алынған нәтижелердің барлығы да еркіндік дәрежелері бір–біріне мейлінше тәуелсіз болатын фазалық кеңістік үшін орындалатындығын айтып өту қажет. Аналитикалық механика үшін қолданылған осы тәсілдер электродинамикадағы өрістер теориясының теңдеулерін алу үшін де сәтті қолданылды. Дәлірек айтқанда, электромагниттік өрістегі зарядталған бөлшектің энергиясы векторлық өріс потенциалының қолайлы мәндері үшін анықталды. Қолайлы мәндер ретінде бойлық электр өрісі мен бөлшек тұрған жерлерге сәйкес келетін векторлық потенциалдар қарастырылды.

Түйін сөздер: қозғалыс теңдеулері, электромагниттік өріс теңдеулері, Гамильтон және Лагранж функциялары, жалпылама координаталар, импульстер және жылдамдықтар, энергияның сақталуы, дербес туындылы теңдеу

Жіберілді 14.12.2025. Өзгертілді 30.01.2026. Қабылданды 30.01.2026. Онлайн қол жетімді 30.03.2026.

* хат-хабар авторы

Кіріспе

Жарық жылдамдығымен салыстырғанда өте аз жылдамдықтармен қозғалатын денелер механикасының физикалық негіздерін түсіну үшін Ньютон, Лагранж және Гамильтон ұсынған теориялық зерттеу тәсілдерін білу жеткілікті. Бұл көзқарастар математикалық аппарат тұрғысынан алғанда аса күрделі есептеулерден тұрғанымен, олардың нәтижелері мәселені түбегейлі, әрі талассыз шешіп бере алады. Сондықтан да, олар теориялық (аналитикалық) механиканың негізгі діңгегі болып табылады. Лагранждық механика N материалдық нүктеден құрылған механикалық жүйенің қозғалысын үш өлшемді эвклидтік кеңістікте қарастыруға арналған. Жүйедегі барлық оқиғалар Лагранж функциясы арқылы сипатталып, уақыт пен кеңістіктің қасиеттерінен жалпылама сақталу заңдары (қозғалыс интегралдары) шығады. Бұл тәсіл әсіресе дененің мардымсыз тербелістері мен қатты дененің динамикасын зерттеуге өте ыңғайлы.

Ал, Гамильтондық механика болса 6N өлшемді фазалық кеңістікке геометрияны, Пуанкеренің интегралдық инварианттары мен Гамильтон функциясын қолдана отырып бөлшектердің координаталары мен импульстерінің өзара байланыстарын сипаттай алады. Лагранждың механикасына Гамильтондық механиканың дербес жағдайы ретінде қарау қажет, яғни Лагранж функциясына Лежандр түрлендірулерін қолдану арқылы Гамильтон функциясын алуға болады. Гамильтондық механика эргодикалық теория, статистикалық механика, оптика және кванттық механика секілді математикалық физиканың салаларымен тығыз байланысты. Қарастырылып отырған осы екі тәсілдің зерттеу нысандары соншалықты ауқымы болуына қарамастан оларды жарық жылдамдығына жуық жылдамдықтармен қозғалатын денелерге қолдануға болмайды. Себебі, салыстырмалылық теориясында бөлшектер жүйесінің потенциалдық энергиясы деген ұғым жоқ. Потенциалдық энергия әсерлесуші денелердің орналасу жағдайларына ғана тәуелді болғандықтан, ол өте аз жылдамдықтарға арналған алыстан әсерлесу теориясында ғана жүзеге асатын ұғым.

Электродинамикадағы Максвелл теңдеулері классикалық механикадағы Ньютон заңдары немесе салыстырмалылық теориясындағы Эйнштейн постулаттары іспетті, яғни олар кез–келген электромагниттік өрістерді, белгілі бір ортадағы токтар мен электрлік зарядтарды байланыстыра сипаттайтын интегралдық және дифференциалдық түрдегі теңдеулер жүйесі болып табылады. Максвеллден бұрын өмір сүрген Эрстед, Ампер және Фарадей секілді ғұлама ғалымдарды электродинамиканың негізін қалаушылар ретінде білеміз, олар тәжірибелер арқылы индукциялық токты, магниттік күш сызықтарын, өздік индукция құбылысын және т.с.с. ашып электродинамиканың негізгі заңдылықтарын тағайындап берді. Алайда, физиканың осы бөліміндегі ең көрнекті жетістік–өріс ұғымының енуі екендігі даусыз. Мәселе электр мен магниттің бүкіл кеңістікке жайыла енуі жөнінде болып отыр, яғни Максвеллдің тұжырымы бойынша электр және магнит өрістері токтар пен зарядтар жоқ жерлерде (кеңістікте) де байқала береді, олар кеңістіктің нүктесі мен уақытқа тәуелді. Максвелл жүргізілген барлық тәжірибелердің нәтижелерін ескере отырып екі өріс бағынатын теңдеулер жүйесін жасады. Бұл жүйе кеңістіктің әрбір нүктесінде бір–біріне перпендикуляр бағыттала отырып бірдей жиіліктегі гармоникалық тербелістер жасайтын электр және магнит өрістерін математикалық тұрғыдан сипаттауға арналған, олардың қарапайым дербес шешімдері–түзу сызық бойымен жарық жылдамдығы бойынша тарайтын электромагниттік толқын. Осылайша жарықтың толқындық табиғаты белгілі болды. Максвелл теңдеулерінің астарын зерттеген Лоренц, Эйнштейн, Пуанкаре және Минковский секілді физиктер мен математиктердің қажырлы еңбектерінің арқасында дүниеге релятивистік механика келді.

Механикалық жүйелер мен өрістерге арналған теңдеулер вариациялық принциптер арқылы шығарып алынғандығы белгілі [1–3]. Вариациялық принциптер мен оларға сәйкес келетін дифференциалдық теңдеулер кванттық теорияның негізін құрайтынын да білеміз. Мәселеге осындай көзқараста қарайтын болсақ, онда энергияның сақталу заңы Лагранж функциясының уақытқа айқын түрде тәуелді болмауымен түсіндірілетін болады. Бұл мақалада біз басқаша жолмен жүретін боламыз, яғни энергияның сақталу заңынан жалпылама импульстерді қорытып шығарамыз, содан кейін Лагранж функциясының және координаталар мен жылдамдықтар арқылы жазылатын импульстердің өрнектерін анықтайтын боламыз. Осылар арқылы канондық түрлендірулер мен энергияның сақталу заңының өзара үйлесімділігін орнату арқылы дифференциалдық теңдеулер және олардағы функционалдық тәуелділіктерді қарастыратын боламыз. Міне, жоғарыда келтірілген мәліметтерді келтіре келе мақала тақырыбының проблемалық жағдай мен зерттеудің өзектілігі, объекті мен пәні, мақсат пен міндеттері туралы қысқа әрі нақты тұжырымдармен айқындау үшін мыналарды айтуды жөн санап отырмыз: аналитикалық механикадағы Лагранж және Гамильтон теңдеулерін сақталу заңдары негізінде де алуға болатындығын көрсету, ол осы теңдеулердің маңызы мен құндылығын арттыра отырып оның математикалық аппаратын кеңейтеді. Зерттеу объекті ретінде көп өлшемді жүйенің айнымалыларын түрлендіруге қатысты аналитикалық пәнге деген зерттеу ынтасын арттырады. Бұл бағытта жасалынып жатқан зерттеулер дербес импатта болғандықтан, оларға нақтылы бір сипаттамалар жасалмады. Әрине, мақаланың мақсаты белгілі бір ғылыми олқылықтың орнын толтыру емес, қайта аналитикалық механиканың негізгі деген теңдеулерінің алыну жолдарының бірін насихаттау болып табылады.

Әдіснама

Аналитикалық механиканың материалдары (негізгі концепциялары) қатарына дененің қозғалыстары мен оның себептерін, денелердің қасиеттерін, денелер жүйесінің тепе–теңділік заңдылықтарын, сақталу заңдары мен қозғалыс теңдеулерін жатқызуға болады. Қозғалыс себептері ретінде барлық ішкі және сыртқы күштер, әсерлесу күштері алынады. Зерттеу әдістеріне жалпылама координаталар мен жүйенің лагранжианына негізделген Лагранж формализмі, жалпылама координаталарға, жылдамдықтарға және жүйенің гамильтонианына негізделген Гамильтон формализмін, функциялардың экстремумдері мен функционалдарды анықтауға арналған вариациялық есептеулерді жатқызамыз. Мақаладағы қолданылатын әдіс тікелей энергияның сақталу заңын Лагранждық түрлендірулермен ұштастыру болып табылады. Сол арқылы канондық теңдеулер мен олардың айнымалыларымен жүргізілетін аналитикалық есептеулерді жүйелі жүргізуге мүмкіндік береді.

Классикалық электродинамикадағы электромагниттік өрістер теориясының материалдарына (өрістің қасиеттеріне) біртұтас сипатта қарастырылатын электр және магнит өрістерін, өрістің материялығын және электромагниттік толқынды жатқызуға болады. Теорияның зерттеу, сипаттау және есептеу әдістеріне Максвелл теориясы мен ондағы теңдеулер және жарықтың электромагниттік қасиеті жатады.

Нәтижелер мен талқылау

Жалпылама $q^i(i=1,\ldots,N)$ координаталар мен жалпылама $\vartheta^i = \frac{dq^i}{dt}$ жылдамдықтарға тәуелді болатын жүйенің энергиясы $E(q,\vartheta)$ болсын. Жүйенің күйі 2N өлшемді кеңістіктегі координаталары (q,ϑ) болатын нүкте арқылы кескінделеді. Траектория бойындағы энергияның сақталуын сипаттайтын математикалық өрнек мына түрде жазылады:

$$dE(q,\vartheta) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial E}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial E}{\partial \vartheta^i}d\vartheta^i\right) = 0 \qquad (1)$$

Бұл теңдіктің оң жақ бөлігіндегі қосынды нөлге тең болғанымен, қосылғыштардың әрқайсысы нөлден өзге болатын мәндерді қабылдайды. Тәуелсіз еркіндік дәрежелерінің өзгерістері кезінде энергияның сақталуын қамтамасыз ету үшін жылдамдықтардың орнына $E(q,\vartheta)=H(q,p)$ түрлендіруі орындалатындай p^i айнымалыларын енгіземіз. Себебі, жүйе (p,q)фазалық кеңістікте қарастырылып отырғандықтан, Гамильтон теңдеулерінде жылдамдықтар импульстермен алмастырылады. Ал импульстер тәуелсіз айнымалылар ретінде тек координаталардың туындысы ғана емес, олар қозғалыс энергиясын білдіреді Дж/(м/с)кеңістіктің 2N өлшемділігіне байланысты p^i болуы заңды. Осыған сәйкес:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q^1}dq^1 + \frac{\partial H}{\partial p_1}dp_1 = \frac{\partial H}{\partial q^2}dq^2 + \frac{\partial H}{\partial p_2}dp_2 = \ldots = \frac{\partial H}{\partial q^N}dq^N + \frac{\partial H}{\partial p_N}dp_N \qquad (2)$$

Егер жүйе өзара тәуелсіз (әсерлеспейтін) бөліктерден құралған болса, онда осы бөліктердің әрқайсысындағы энергия өзгеріссіз қалады (сақталады). Бұл барлық түрдегі еркіндік дәрежелері бір–біріне мейлінше тәуелсіз болатын өлшемі 2N–ге тең (q,ϑ) түрдегі фазалық кеңістікте жұмыс жасап жатқандығымыздың айғағы болып табылады. (2)–теңдеуді N пропорция түрінде де жазуға болады:

$$\frac{dq^1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial q^1}} = dt_1, \ldots, \frac{dq^N}{\frac{\partial H}{\partial p_N}} = -\frac{dp_N}{\frac{\partial H}{\partial q^N}} = dt_N \qquad (3)$$

(2) және (3)–теңдеулер жалпы саны N өзара тәуелсіз dq^i орын ауыстыруларды сипаттап бере алады. Шынында да, $dq^i=\vartheta^i$ dt қозғалыстары кезінде (3)–гі барлық мүшелерді

ISSN: 2616-6836. eISSN: 2663-1296

тең дәрежеде ұстау үшін $\vartheta^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ деп алуға болады, басқаша айтқанда *dti=...=dt_N=dt* деп санау керек. Осыдан төмендегі Гамильтон теңдеулеріне оңай өтеміз:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{4}$$

Байқап отырсаңыздар, (2)–теңдеуді жазған кезде әзірге толықтай анықталмаған және $\vartheta^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$шартын қанағаттандыратын p^i айнымалылары мен *H* функциясы енгізілген. Ондағы мақсатымыз – (1)–түрдегі энергияның сақталу заңын қанағаттандыратын (4) дифференциалдық теңдеулерді (қозғалыс теңдеулерін) табу. $\vartheta^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ болғандықтан, Донкин теоремасына сәйкес [4], Гамильтон функциясымен қосарлана жүретін

$$L(q,\vartheta) = p_i\vartheta^i - H(p,q) \tag{5}$$

түрдегі жылдамдықтардың функциясы мен $p_i = \frac{\partial L}{\partial \vartheta^i}$ қатынасын пайдаланып Лагранж функциясына арналған төмендегі дербес туындылы теңдеуді аламыз:

$$\vartheta^i \frac{\partial L}{\partial \vartheta^i} = L + E(q,\vartheta) \tag{6}$$

Бұл теңдеу жылдамдық айнымалысына тәуелді болатын екі түрлі функцияны байланыстырады және оның шешімі – Лагранж функциясы *(L)*:

$$L=L_1(q,\vartheta)+a_i(q)\,\vartheta^i \tag{7}$$

Мұндағы $_{L1}$–функциясы (6)–ның дербес шешімі, ал $a_i(q)\,\vartheta^i$ – біртекті теңдеудің толық шешімі болып табылатын энергияға үлесі жоқ гироскоптық күштер [5, 6], a_i–саны *N*-ге тең тұрақтылар.L_1-ді Тейлор қатарына жіктеу арқылы анықтауға болады, яғни

$$E(q,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{ik\dots l}^{(n)}\vartheta^i\vartheta^k \dots \vartheta^l \tag{8}$$

Олай болса

$$L_1(\vartheta) = -A^{(0)} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}A_{ik\dots l}^{(n)}\vartheta^i\vartheta^k \dots \vartheta^l = -E(q,0) + \int_1^{\infty}\left[E\left(q,\frac{\vartheta}{x}\right) - E(q,0)\right]dx \tag{9}$$

Бұл теңдеудің шешімі тек $A_i^1=0$ шарты үшін ғана орындалады. Егер, (8)–қатар *n=2* кейін бұзылатын болса, онда энергия потенциалдық *(U)* және кинетикалық *(T)* энергия

лардың қосындысынан тұратын болады: $E = A^{(0)} + A_{ik}^{(2)}\vartheta^i\vartheta^k = U(q) + T(q,\vartheta)$ және (9)–дан:
$L_1 = T - U$ шығады. (7) мен (9)–ды пайдалансақ, онда

$$p_i = a_i + \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial\vartheta^i} E\left(\frac{\vartheta}{x}\right) dx \qquad (10)$$

түрдегі жалпылама импульстер мен $H = E[q,\vartheta(p)]$–Гамильтон функциясын анықтаймыз. (4)–гі Гамильтон функцияларының екіншісін Лагранж теңдеуіне түрлендірсе болады. (7)–ден:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial\vartheta^i} = \frac{\partial L_1}{\partial q^i} + \vartheta^j\left(\frac{\partial a_j}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial q^j}\right) \qquad (11)$$

(6)–теңдеудегі $E(q,\vartheta)$ энергияның орнына оның кез–келген $F[E(q,\vartheta)]$ түрдегі функциясын қолдануға болады, олай болса (7) мен (9)–дан Лагранж функциясының басқа да түрлерін табуға болады [7–9]: $E = A^{(0)} + A_{ik}^{(2)}\vartheta^i\vartheta^k = U(q) + T(q,\vartheta)$ және $F(E) = E^2$. Бұл жағдайда (9)–теңдіктен: $L_1 = \frac{T^2}{3} + 2UT - U^2$. Егер, тек қана энергияның сақталу заңын ғана қолданар болсақ, онда Лагранж функциясын (6)–дан тауып алып, Лагранж теңдеуінің жалпыланған нұсқасына қол жеткізуге болады:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vartheta^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = G_{ij}\left(q,\vartheta,\dot{\vartheta}\right)\vartheta^j \qquad (12)$$

Мұндағы $G_{ij} = -G_{ji}$–антисимметриялық тензор.

Осы тәсілдің өрістерге қолданылуын қарастырамыз. Электромагниттік өрістегі зарядталған бөлшектің энергиясы

$$E = \frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2 + \left(rot\vec{A}\right)^2\right]d^3\vec{r} + \sum_\alpha \frac{m_\alpha c^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{\vartheta}_\alpha^2}{c^2}}} + \sum_{\alpha,\beta}\frac{Q_\alpha Q_\beta}{\left|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta\right|} \qquad (13)$$

Мұндағы $\vec{A}$–векторлық потенциал, $m_\alpha, Q_\alpha, \vec{r}_\alpha, \vec{\vartheta}_\alpha$–рет саны α зарядтың массасы, заряды, координатасы және жылдамдығы, c–жарық жылдамдығы. (7), (9) және (13)–өрнектерден:

$$L = \frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2 - \left(rot\vec{A}\right)^2\right]d^3\vec{r} - \sum_\alpha m_\alpha c^2\sqrt{1-\frac{\vec{\vartheta}_\alpha^2}{c^2}} - \sum_{\alpha,\beta}\frac{Q_\alpha Q_\beta}{\left|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta\right|} + \sum_\alpha \vec{a}_\alpha\vec{\vartheta}_\alpha + \iiint \vec{a}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}d^3\vec{r} \qquad (14)$$

Сонда:

$$\left(\vec{r},t\right)=\frac{\delta L}{\delta\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}=\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial A_i}{\partial t}+a_i\left(\left\{\vec{A}\right\},\left\{\vec{r}_\alpha\right\},\vec{r}\right) \tag{15}$$

Мұндағы $i=1{,}2{,}3$

$$\vec{p}_\alpha(t)=\frac{\partial L}{\partial\vec{\vartheta}_\alpha}=\frac{m_\alpha\vec{\vartheta}_\alpha}{\sqrt{1-\frac{\vartheta_\alpha^2}{c^2}}}+\vec{a}_\alpha\left(\left\{\vec{A}\right\},\left\{\vec{r}_\alpha\right\}\right) \tag{16}$$

(15)–гі фигуралы жақшалар $\vec{a}$ векторлық өрісі мен $\vec{a}_\alpha$ векторлары үш өлшемді кеңістіктің барлық нүктелеріндегі векторлық потенциал мен барлық бөлшектердің координаталарына тәуелді екендігін көрсетеді, яғни олар $\vec{A}$ бойынша функционал және координаталарға тәуелді функция болып табылады екен. (14)–түрдегі Лагранж функциясы $\vec{a}=\vec{a}_\alpha=0$ шартында өрістің көлденен бөлігіндегі бөлшектер мен өрістің өзара әсерлеспеуіне сәйкес келетін теңдеулерге алып келеді. Сондықтан да, өріс пен бөлшектерді байланыстыру үшін бізгі $\vec{a}$–ның қолайлы мәндері керек. Дәл айтсақ, $\vec{a}$ векторлық өрісі бөлшектердің $\vec{r}_\alpha$ координаталарына, ал $\vec{a}_\alpha$ векторлары $\vec{A}$ потенциалға тәуелді болуы керек. $\vec{a}$ үшін ең қарапайым таңдау k коэффициентті бойлық электр өрісі болмақ:

$$\vec{a}=kgrad\varphi,\varphi=\sum\nolimits_\alpha\varphi_\alpha=\sum\nolimits_\alpha\frac{Q_\alpha}{\left|\vec{r}-\vec{r}_\alpha\right|} \tag{17}$$

Ал, $\vec{a}_\alpha$ үшін қарапайым таңдау $\vec{a}_\alpha=k_\alpha\vec{A}\left(\vec{r}_\alpha,t\right)$ болады. Осы жағдайларды ескеріп, (14)–тен Лагранж теңдеулерін алуға болады [10]:

$$\frac{4}{4\pi c}\frac{\partial^2\vec{A}_i}{\partial t^2}-k\sum\nolimits_\alpha\vartheta_{\alpha j}\partial_j(\partial_i\varphi_\alpha)=\frac{1}{4\pi}\Delta A_i+\sum\nolimits_\alpha k_\alpha\vartheta_{\alpha i}\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_\alpha\right) \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_\alpha(\vec{\vartheta})^2}{\sqrt{1-\frac{(\vartheta_\alpha)^2}{c^2}}}+k_\alpha\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\vartheta}_\alpha\times rot\vec{A}\right)=Q_\alpha\sum\nolimits_{\beta\neq\alpha}\frac{Q_\beta\left(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta\right)}{\left|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta\right|^3} \tag{19}$$

Кулондық калибрлеуіш шарт орындалу үшін (18)–ғы көлденең токтың нөлдік дивергенциясы қажет:

$$\partial_i\sum\nolimits_\alpha\left(k_\alpha\vartheta_{\alpha i}\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_\alpha\right)+k\vartheta_\alpha\partial_j\partial_i\varphi_\alpha\right) \tag{20}$$

Осыдан $\frac{k_\alpha}{k}4\pi Q_\alpha.\ \frac{1}{k}=4\pi c$ болған жағдай үшін (18) және (19)–теңдеулер төмендегіше жазылады:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\Delta\vec{A}=\frac{4\pi}{c}\sum_\alpha Q_\alpha\vec{\vartheta}_\alpha\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_\alpha\right)-\frac{1}{c}grad\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (21)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_\alpha(\vec{\vartheta})^2}{\sqrt{1-\frac{(\vartheta_\alpha)^2}{c^2}}}=Q_\alpha\left[\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{Q_\beta\left(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta\right)}{\left|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta\right|^3}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]+\left[\frac{Q_\alpha}{c}\vec{\vartheta}_\alpha\times rot\vec{A}\right] \qquad (22)$$

Сонымен, k тұрақтысын осы тәсілдегідей қатынаста таңдап алу негізсіз болып табылады. Себебі, электромагниттік өрістің көлденең және бойлық бөліктерінің сипатталу ерекшеліктері бірдей емес, яғни көлденең құраушысы еркіндік дәрежелері бойынша сипатталса, бойлық құраушысы олай сипатталмайды. Екі құраушы арасындағы байланыс тек теңдеулердің релятивистік инварианттылығы арқылы ғана іске асады.

Қорытынды

Гамильтон теңдеулері $S=W-E_0\,t$ және W әсерлеріне арналған

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)=0 \qquad (23)$$

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=E_0 \qquad (24)$$

дербес туындылы Гамильтон–Якоби теңдеулеріне және вариациялық принциптерге эквивалент. Импульстерді (2) – түрдегі энергияның сақталу заңының егжей–тегжейлі принципіне сәйкес таңдап алу фазалық көлем мен фазалық тығыздықтың (Лиувилл теоремасы) сақталуын қамтамасыз етеді. Соңғысы статистикалық механикада қолданылады. Жалпылама импульстерді (2)–бойынша анықтау тәсілі термодинамиканың негізгі теңдеуі арқылы энтропияны анықтау секілді.

Сонымен, бұл мақалада энергияның егжей–тегжейлі сақталу принципі туралы баяндалды, ол еркіндік дәрежелердің мейлінше өзара тәуелсіздігін қамтамасыз ететін және арнайы айнымалылар ретінде жүретін жалпылама импульстерді анықтап береді. Энергияның жалпылама координаталар мен жылдамдықтарға тәуелділігі арқылы (7) және (9)–дан Лагранж функциясы табылды. Оны жылдамдықтар бойынша дифференциалдап жалпылама импульстерді анықтадық. Соңғыларды энергияның өрнегіне қойып Гамильтон функциясын тауып алдық. Мақалада қолданылған тәсіл ең алдымен жалпылама импульстердің мағынасын ашуға мүмкіндік береді. мақалада алынған нәтижелер мен келтірілген теориялық тұжырымдамалар күрделі техникалық жүйелерді модельдеу барысында, тербелістерді есептеу кезінде, роботтар техникасында және аспан денелері механикасының өзекті зерттеулерінде қолданыс таба алады. Сонымен бірге, олар траекторияларды, күштердің моменттері мен орнықтылық параметрлерін анықтауға жағдай жасайды. Энергияның сақталу заңы консервативті жүйелердің қозғалысын қозғалыс теңдеулерін интегралдамай–ақ жылдамдық пен координатаны анықтауды оңтайландырады. Мақала нәтижелері мен ондағы әдістер бойынша жүргізілген есептеулерді аналитикалық механиканың дамуына қосылған үлес деп қабылдауға болады. Канондық теңдеулерге қол жеткізудің қарапайым да ықшамды тәсілі ұсынылып, энергияның сақталу заңының маңызы мен қолданылу аясын кеңейтуге ұмтылыс жасалды.

Гамильтон және Лагранж теңдеулерін вариациялық принциптер арқылы алу әдісіне қарағанда сақталу заңын пайдаланудың артықшылығы мұнда белгілі шарттар, ұғымдар мен заңдылықтарды қажет етуінде, яғни математикалық аппараттың мол жиынының қолданылу аясының кеңдігінде және өрнектердің ықшамдылығында. Мысалы, калибрлеуші шарт, Донкин теоремасы, антисимметриялық тензор және Лиувилл теоремасы арқылы есептеулер өте оңтайлы түрде жүргізіледі.

Мақала мәтінінде келтірілген бірнеше ұғымдарға түсініктеме беріп өтуді жөн санап отырмыз.

1. Калибрлеуші шарт – қозғалыс теңдеулеріндегі артық еркіндік дәрежелерін жою мақсатында калибрлік өрістерге (мысалы, электромагниттік потенциалға) қойылатын қосымша шектеулер. Олар Максвелл теңдеулері секілді теңдеулердің шешімдерін теорияның инварианттылығын сақтай отырып жалғыз деп тануға жағдай жасайды.

2. Донкин теоремасы – егер координаталар мен импульстердің түрлендіруі потенциалды болса (өндіргіш функциялар арқылы жүргізілсе), онда кері түрлендірулер де потенциалды болады. Бұл Лагранж түрлендірулері мен канондық түрлендірулер теориясында потенциалдылық симметриясын көрсетеді.

3. Антисимметриялық тензор – өзінің ковариантты немесе контрвариантты жұп индекстерінің орындары ауысқан кезде таңбасын өзгертетін тензор. Оның барлық диагоналды құраушылары нөлге тең болғандықтан айналулар мен электромагниттік өрістерді сипаттауға өте қолайлы болып табылады.

4. Лиувилл теоремасы – жүйенің нүктелер ансамблінің фазалық көлемі (ықтималдылық тығыздығы) уақытқа сәйкес қозғалысы кезінде өзгеріссіз қалады деген гамильтондық механика мен статистикалық физиканың заңы. Фазалық кеңістікте, фазалық нүктелер жоғалмайды және қайта пайда бола алмайды.

Авторлардың қосқан үлесі

Әлімбекова Г. – мақаланың аналитикалық механикаға қатысты есептеулердің ішіндегі қозғалыс теңдеулерін және алғашқы үш өрнекке келтірілетін амалдар бойынша нәтижелер алды. Тақырыпқа сай зерттеулерді сұрыптап, әдебиеттер тізімін жасауға үлес қосқан.

Кенесбаев С.М. – барлық есептеу, талдау және қорытындылау жұмыстарына басшылық жасап, есептеулердің математикалық бірізділігін қадағалады. Он үшінші және он жетінші теңдіктерді есептеп шығарды. Әдебиеттерге саралау жасап, тақырыпқа сәйкес келетіндерін іріктеп, оларға сілтемелер жасады.

Тугелбаева Г.Т. – толыққанды анықталмаған гамильтонианы бар Гамильтон теңдеулерін шығарып алуға атсалысты. Импульстердің координаталар мен жылдамдықтарға тәуелділіктерін сипаттайтын қатынастарды тауып, жүйенің энергиясына белгілі шама ретінде қарау, осы арқылы Лагранж функциясы табуға болатындығын есептеулер арқылы көрсетті. Ілеспе–хатты дайындап, мақаланы редакцияға жолдауды да іске асырды.

Құткелдиева Э.О. – математикалық есептеулердің ішінде төртінші және жетінші формулалар аралығындағы операцияларды орындап шықты. Жалпылама импульстерді анықтайтын теңдеулерді қорытылып шығарды және жүйенің кез–келген еркіндік дәрежелерінің өзгерістері кезінде энергияның сақталатындығын дәлелдеуге атсалысты.

Сандыбаева Ә.М. – мақалада жүргізілген математикалық есептеулерді тексеріп шықты және мақаланың мәтінін компьютерде теріп шықты. Әдебиеттерді жинақтауға қатысты.

Оңдақанов Д.А. – аналитикалық механика үшін қолданылған мақала мәтініндегі тәсілдерді электродинамикадағы өрістер теориясының теңдеулерін алу үшін қолдануға қатысты он бесінші және жиырмасыншы формулаларды алуды орындады. Электромагниттік өрістегі зарядталған бөлшектің энергиясы үшін векторлық өріс потенциалының қолайлы мәндерін табуға атсалысты.

Әдебиеттер тізімі

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теоретическая физика. Механика (Наука, Мәскеу, 1988), 216 б.

2. Г. Гольдстейн, Классическая механика (УРСС, Мәскеу, 2012), 828 б.

3. М.А. Айзерман, Классическая механика (Физматлит, Мәскеу, 2005), 384 б.

4. Ф.Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике (Физматлит, Мәскеу, 2005), 264 б.

5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теоретическая физика. Теория поля (Наука, Мәскеу, 1988), 512 б.

6. М.В. Давидович, Законы сохранения и плотности энергии и импульса электромагнитного поля в диспергирующей среде., Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика, № 1, 46–54 б. (2012). https://doi.org/10.18500/1817-3020-2012-12-1-46-54

7. А.А. Власов, Макроскопическая электродинамика (КД Либроком, Мәскеу, 2019), 232 б.

8. В.М. Журавлев, Принцип материальности пространства и фундаментальные поля. Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, № 3, 37–57 б. (2020). https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2020.3.37-57

9. A. Stephane, B. Florence, Electron mass predicted from substructure stability in electrodynamical model, Frontiers in Physics, 213 (8), 222–229 б. (2020). https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00213

10. L. Galvagni, M. Guido, L. Matteo, Einstein's elevator and the principle of equivalence, Physics Education, 60 (5), 177–190 б. (2025). https://doi.org/10.1088/1361-6552/aded61

Г. Алимбекова, С.М. Кенесбаев, Г.Т. Тугелбаева*,
Э.О. Куткелдиева, А.М. Сандибаева, Д.А. Ондаканов
Казахский национальный женский педагогический университет,
Алматы, Казахстан
(E-mail: alimbek50@mail.ru, kenesbaev–sm@mail.ru, tugelbaevagul5@gmail.com, elzira.kutkeldieva@gmail.com, adema.sandybaeva@bk.ru, dastan_vko99@mail.ru)

О выводе уравнений движения и поля из закона сохранения энергии

Аннотация. Уравнения движения в аналитической механике и уравнения в теории электромагнитных полей выводятся с использованием принципа наименьшего действия к функции Лагранжа. В данной статье уравнения Гамильтона и Лагранжа получены без использования вариационных принципов. Выведены уравнения, определяющие обобщённые импульсы с условием, что энергия является функцией обобщённых координат и скоростей, а также доказано сохранение энергии системы при изменении любых степеней свободы. На основе этих предположений, были получены уравнения Гамильтона с полностью неопределённым гамильтонианом. Чтобы найти соотношения, описывающие зависимость импульсов от координат и скоростей, показано, что нужно определить функцию Лагранжа, рассматривая энергию системы как известную величину. Необходимо отметить, что все полученные результаты справедливы для фазового пространства, в котором степени свободы являются максимально независимыми друг от друга. Методы, применённые в аналитической механике, были успешно использованы и для получения уравнений теории полей в электродинамике. Точнее, энергия заряженной частицы в электромагнитном поле была определена для подходящих значений векторного потенциала поля. В качестве подходящих значений рассматривались продольное электрическое поле и векторные потенциалы, соответствующие положениям частицы.

Ключевые слова: уравнения движения, уравнения электромагнитного поля, функции Гамильтона и Лагранжа, обобщённые координаты, импульсы и скорости, сохранение энергии, дифференциальное уравнение в частных производных

G. Alimbekova, S.M. Kenesbayev, G.T. Tugelbaeva*,
E.O. Kutkeldiyeva, A.M. Sandybayeva, D.A. Ongdakanov
Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
(E-mail: alimbek50@mail.ru, kenesbaev–sm@mail.ru, tugelbaevagul5@gmail.com, elzira.kutkeldieva@gmail, adema.sandybaeva@bk.ru, dastan_vko99@mail.ru)

On the derivation of the equations of motion and field from the law of conservation of energy

Abstract. The equations of motion in analytical mechanics and the equations in the theory of electromagnetic fields are derived using the principle of least action applied to the Lagrangian function. This article obtains Hamilton's and Lagrange's equations without using variational principles. The equations determining generalized momenta are derived under the condition that the energy is a function of the generalized coordinates and velocities. The conservation of the system's energy under changes in any degrees of freedom is also proven. It should be noted that, based on these assumptions, Hamilton's equations were obtained with a completely undetermined Hamiltonian. To find the relations describing the dependence of momenta on coordinates and velocities, it is shown that the Lagrangian function must be determined by considering the system's energy as a known quantity. It should be emphasized that all obtained results are valid for a phase space in which the degrees of freedom are maximally independent of each other. The methods applied in analytical mechanics were successfully used to derive the field theory equations in electrodynamics. More precisely, the energy of a charged particle in an electromagnetic field was determined for suitable values of the vector potential of the field. As suitable values, the longitudinal electric field and vector potentials corresponding to the positions of the particle were considered.

Keywords: equations of motion, electromagnetic field equations, Hamiltonian and Lagrangian functions, generalized coordinates, momenta and velocities, energy conservation, partial differential equation

References

1. L.D. Landau, E.M. Lifshic, Teoreticheskaja fizika. Mehanika [Theoretical physics. Mechanics], (Nauka, Moscow, 1988), p. 216 [in Russian]

2. G. Gol'dstejn, Klassicheskaja mehanika [Classical mechanics], (URSS, Moscow, 2012), p. 828 [in Russian]

3. M.A. Ajzerman, Klassicheskaja mehanika [Classical mechanics], (Fizmatlit, Moscow, 2005), p. 384 [in Russian]

4. F.R. Gantmaher, Lekcii po analiticheskoj mehanike [Lectures on Analytical Mechanics], (Fizmatlit, Moscow, 2005), p. 264 [in Russian]

5. LD. Landau, E. M. Lifshic, Teoreticheskaja fizika. Teorija polja [Theoretical physics. Field theory], (Nauka, Moscow, 1988), p. 512 [in Russian]

6. M.V. Davidovich, Zakony sohranenija i plotnosti jenergii i impul'sa jelektromagnitnogo polja v dispergirujushhej srede [Conservation and Density of Energy and Momentum of an Electromagnetic Field in a Dispersing Medium], Izvestija Saratovskogo universiteta. Novaja serija. Serija Fizika [Izvestiya of Saratov University. New Series. Physics Series], № 1, p. 46-54 (2012). https://doi.org/10.18500/1817-3020-2012-12-1-46-54 [in Russian]

7. A.A. Vlasov, Makroskopicheskaja jelektrodinamika [Macroscopic Electrodynamics], (KD Librokom, Moscow, 2019), p. 232 [in Russian]

8. V.M. Zhuravlev, Princip material'nosti prostranstva i fundamental'nye polja [The Principle of Materiality of Space and Fundamental Fields], Prostranstvo, vremja i fundamental'nye vzaimodejstvija [Space, time, and fundamental interactions], № 3, p. 37–57 (2020). https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2020.3.37-57 [in Russian]

9. A. Stephane, B. Florence, Electron mass predicted from substructure stability in electrodinamical model, Frontiers in Physics, 8 (213), p. 222-229 (2020). https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00213

10. L. Galvagni, M. Guido, L. Matteo, Einstein's elevator and the principle of equivalence, Physics Education, 60 (5), p. 177–190 (2025). https://doi.org/10.1088/1361-6552/aded61

Авторлар туралы мәлімет:

Әлімбекова Г. – п.ғ.д., доцент, физика кафедрасы, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Қазақстан, Алматы, Әйтеке би көшесі, 99.

Кенесбаев С.М. – п.ғ.д., профессор, физика кафедрасы, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Қазақстан, Алматы, Әйтеке би көшесі, 99.

Тугелбаева Г.Т. – хат-хабар авторы, х.ғ.к., доцент, физика кафедрасы, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Қазақстан, Алматы, Әйтеке би көшесі, 99.

Құткелдиева Э.О. – п.ғ.м., аға оқытушы, физика кафедрасы, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Қазақстан, Алматы, Әйтеке би көшесі, 99.

Сандыбаева Ә.М. – п.ғ.м., оқытушы, физика кафедрасы, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Қазақстан, Алматы, Әйтеке би көшесі, 99.

Оңдақанов Д.А. – п.ғ.м., оқытушы, физика кафедрасы, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Қазақстан, Алматы, Әйтеке би көшесі, 99.

Алимбекова Г. – д.п.н., доцент, кафедра физики, Казахский национальный женский педагогический университет, Казахстан, Алматы, ул. Айтеке би, 99.

Кенесбаев С.М. – д.п.н., профессор, кафедра физики, Казахский национальный женский педагогический университет, Казахстан, Алматы, ул. Айтеке би, 99.

Тугелбаева Г.Т. – автор для корреспонденции, к.х.н., доцент, кафедра физики, Казахский национальный женский педагогический университет, Казахстан, Алматы, ул. Айтеке би, 99.

Куткелдиева Э.О. – м.п.н., старший преподаватель, кафедра физики, Казахский национальный женский педагогический университет, Казахстан, Алматы, ул. Айтеке би, 99.

Сандыбаева А.М. – м.п.н., преподаватель, кафедра физики, Казахский национальный женский педагогический университет, Казахстан, Алматы, ул. Айтеке би, 99.

Ондаканов Д.А. – м.п.н., преподаватель, кафедра физики, Казахский национальный женский педагогический университет, Казахстан, Алматы, ул. Айтеке би, 99.

Alimbekova G. – Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Physics Department, Kazakh National Women's Pedagogical University, Kazakhstan, Almaty, Aiteke bi str., 99.

Kenesbayev S.M. – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Physics Department, Kazakh National Women's Pedagogical University, Kazakhstan, Almaty, Aiteke bi str., 99.

Tugelbaeva G.T. – the corresponding author, candidate of Chemical Sciences, Associate Professor, Physics Department, Kazakh National Women's Pedagogical University, Kazakhstan, Almaty, Aiteke bi str., 99.

Kutkeldiyeva E.O. – Master of Pedagogical Sciences, senior lecturer, Physics Department, Kazakh National Women's Pedagogical University, Kazakhstan, Almaty, Aiteke bi str., 99.

Sandybayeva A.M. – master of Pedagogical Sciences, lecturer, Physics Department, Kazakh **National Women's Pedagogical University, Kazakhstan, Almaty, Aiteke bi str., 99.**

Ongdakanov D.A. – master of Pedagogical Sciences, lecturer, Physics Department, Kazakh National Women's Pedagogical University, Kazakhstan, Almaty, Aiteke bi str., 99.