



ХҒТАР 29.05.15

<https://doi.org/10.32523/2616-6836-2025-153-4-73-87>

Ғылыми мақала

Кванттық механиканың стохастылық сипаты

Т.Б. Қоштыбаев¹, Ш. Алиев², М.Е. Алиева^{3*}, К.К. Жантлеуов³, Н.А. Сандибаева¹,
А.Т. Жавлиева¹

¹Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

²И. Арабаев атындағы Қырғыз мемлекеттік университеті, Бішкек, Қырғызстан

³Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық

(E-mail: ¹koshtybayev70@mail.ru, ²alidoc2010@mail.ru, ³moldir-2008@mail.ru,
³Kzhantleuov@mail.ru, ¹nazirasandibaeva@gmail.com, ¹zhavliyeva.11@gmail.com)

Аңдатпа. Кванттық механиканы ықтималдылықтар теориясы терминінде тұжырымдау, бейнелеу және сипаттау мәселесі көтеріліп, ол белгілі бір ұстанымдар мен қағидаларға негізделген есептеулер арқылы шешілді. Нақтылай тоқталар болсақ, квантты–механикалық операторға тиесілі шаманың импульстік көріністегі бір өлшемді орташа мәні комплексті сипаттағы квазиықтималдылық функциясы арқылы өрнектелді. Жүйенің күйі тығыздық матрицасы арқылы сипаталатын жағдай үшін квазиықтималдылық функцияның өрнегі табылды, сол арқылы Гамильтон операторының классикалық үлгісімен сәйкес келетін және сәйкес келмейтін сандық көрінісі қарастырылды. Стационарлық жағдай үшін квазиықтималдылық функциясы бойынша орташаланған өрнектер анықталды. Квазиықтималдылық функциясының көмегімен комплексті фазалық кеңістікте өтетін қандай да бір стохасты процестер тығыздық матрицасына арналған дифференциалдық теңдеу арқылы зерттелді. Аталған теңдеу Планк тұрақтысы нөлге тең болған кезде кванттық құбылыстарға арналған Лиувилл теңдеуіне және квазиықтималдылық функциясының кәдуілгі ықтималдылыққа айналатындығы дәлелденді. Ықтималдылық тығыздығына арналған теңдеуден диффузиялық марктік процеске арналған Фоккер–Планк теңдеуіне құрылымдық жағынан ұқсас болып келетін жуықталған комплекстік теңдеуге ауысу жағдайлары көрсетілді. Кездейсоқ процестер мен квазиықтималдылық функциясының арасындағы байланыстарды анықтап беретін комплексті теңдеуге сәйкес келетін және кванттық–механикалық есептеулерге қажетті барлық мәліметтерді қамитиын стохастылық дифференциалдық теңдеулер шығарылып көрсетілді. Толқындық функцияның ерекшелігіне сәйкестендірілген квазиклассикалық стохасты дифференциалды теңдеулер мен квазиклассикалық жуықтаулардағы қозғалыс теңдеулерінің жүйесі шығарылып алынды. Барлық есептеу нәтижелері егжей–тегжейлі талқыланып, қажетті қорытындылар жасалды.

Түйін сөздер: стохастылық теңдеулер, кездейсоқ процестер, толқындық функция, ықтималдылық тығыздығы, квантты–механикалық орташа, оператор, тығыздық матрицасы, үлестірім функциясы.

Жіберілді 25.10.2025. Өзгертілді 21.11.2025. Қабылданды 27.11.2025. Онлайн қол жетімді 25.12.2025.

Кіріспе

Стохастылық ұғымы кездейсоқтық немес анықталмағандық секілді түсініктерге сәйкес келгенімен, оның грек тіліндегі баламасы мақсат, болжау дегенді білдіреді. Біздің жағдайымызға осы болжау нұсқасы дұрыс келетін сияқты. Себебі, кванттық жүйедегі стохасты процестер шектеулі заңдылықтар шеңберінде қалып қоймайды, яғни процестер кезінде жүйенің күйлері болжамды, кездейсоқ шамалар арқылы сипатталатын болады. М. Кац пен Э. Нельсонның пікірлеріне сүйенсек, жүйедегі процестер ықтималдылықтар теориясының терминінде кездейсоқты, стохастылық сипатта өтеді. Стохастылық терминін алғаш рет математик В. Борткевич *болжам жасау* мағынасында қолданған, ал оған дейін бұл ұғым Я. Бернуллидің *Ars Conjectandi* (сәуекелдік өнері) еңбегінде жан-жақты талданып көрсетілген еді. Математикадағы ықтималдылықтар теориясы және математикалық статистика атты үлкен бөлімдер кездейсоқ шамалар мен процестерді бақылаумен, зерттеумен айналысады. Ондағы заңдылықтар мен тұжырымдамалар математиканың басқа да бөлімдеріне әдістемелік аппарат ретінде қолданылып жүр [1]. Мысалы, оңтайландыру әдістері арқылы кездейсоқ процестер мен мәліметтерді статистикалық тұрғыдан өңдеуге болады. Жаратылыстану ғылымдарында да кездейсоқ процестер көптеп кездеседі, солардың бірі – Винерлік процестер, яғни газдың қысымын модельдеу деп аталады. Бұл модельде газдағы әрбір молекула өзіне бекітілген жол (іздің) бойымен қозғалғанымен, молекулалардан құрылған шоғырдың қозғалысын есептеп шығару және оның сипатын алдын-ала болжау қиын мәселе екендігі көрсетілген. Осы секілді математикалы-статистикалық модельдер мен әдістер қазіргі заманға ғылыми зерттеулердің негізін құрайды, мысалы: корреляциялық және регрессиялық модельдер, негізгі компоненттер тәсілі, кластерлік талдау, статистикалық сынақтар (Монте–Карло) әдісі. Стохастық теориян физиканың барлық бөлімдеріне қолданса болады, әсіресе оның статистикалық физика, конденсрлік күй физикасы, қатты денелер физикасы, элементар бөлшектер физикасы мен стохастық резонанс атты құбылыс үшін маңызы ерекше.

Ашық кванттық жүйелерді модельдеу бағытындағы зерттеулер Н.Н. Боголюбов пен Н.М. Крыловтың сонау 1939 жылғы жарық көрген еңбектерінен бастау алады. Одан кейінгі кезеңдерде жүргізілген ғылыми жұмыстардағы орын алған басты қиындық–кванттық кездейсоқ процесс ұғымының мағынасына дұрыс мазмұнның берілмеуі. Аталған қиындықтан шығу үшін А. Коссаковский кванттық динамикалық жарты топтар ұғымын енгізді, оның әрі қарай дамуына Г. Линдبلادтың қосқан үлесі зор болды. Коммутатты емес сипаттағы бұл ұғым–марктік кездейсоқ процестер теориясындағы операторлық топтардың жалпыламалық бейнесі (үлгісі, нұсқасы). Ол кванттық жүйенің эволюциясын оның өткен күйлері арқылы емес, тек қазіргі нақты күйі бойынша сипаттауға арналған және Фоккер–Планк немесе Колмогоров–Чепмен теңдеулерінің коммутатты емес нұсқасы болып табылатын дифференциалды теңдеулер арқылы сипатталады. Кванттық механикадағы стохастылық тәсілдердің көмегімен кванттық және кездейсоқ процестер өзара әсерлесетін жүйелерді сипаттауға болады, бұл жерде стохастылық процестер мен олардың стохастылық түсіндірмелері жаратылыстың негізгі заңдарының нәтижелері ретінде қабылданады. Осы және осы секілді тәсілдер жүйенің

динамикасын марктік кездейсоқ процестерге ұқсас сипаттағы модельдермен зерттеуге мүмкіндік береді. Айта кету керек, марктік процестер жағдайында толқындық функция ықтималдылық тығыздығымен байланыстырыла қарастырылады. Аталған тәсілдер кванттық механиканың дәстүрлі принциптері мен тұжырымдамалары қауқарсыздық танытқан жағдайларда ғана қолданылады. Кванттық-стохастық көзқарас (КСК) кванттық механиканың негізгі принциптері мен стохастық процестердің бірігуіне (үйлесімділігіне) негізделген және қазіргі заманғы технология мен есептеу жолдарының жетілдірілуі арқысында өміршең болып отыр. Сонымен бірге, КСК мүмкіндігінің жоғарылауына серпін беретін тағы бір жағдай-дәстүрлі тәсілдер мен модельдердің кейбір физикалық процестерді шынайы түрде сипаттап, түсініре алмауында. Дәлірек айтсақ, қолданыстағы дәстүрлі статистикалық тәсілдердің көмегімен макроскоптық жүйелердегі кванттық эффекттерді немесе болжауға мүмкін болмайтын стохастылық процестер мен кванттық күйлердің өзара әсерлесулерін жеткілікті дәрежеде зерттеу қиындық келтіретіні жасырын емес. Тек КСК пайда болғалы бері күрделі жүйелер мен процестерді дәл, әрі егжей-тегжейлі модельдеуге мүмкіндіктер ашылды. КСК құбылыстың кванттық және стохастылық табиғаттарына тұтас қарауды ұсынады, бұл жағдай олардың жекелей ерекшеліктері мен бір-біріне деген ықпалын ескеруге қолайлылық туғызады. Жүйеде өтетін стохастық процестер кезінде кездейсоқ флуктуациялар немесе айнымалылар маңызды рөл атқаратыны ақиқат [1,2]. Жүйенің келешектегі жай-күйі кездейсоқ шамалар мен шуларға тәуелді болғандықтан, кездейсоқ флуктуациялар немесе айнымалылар туралы толықтай мәлімет бере алмаймыз. Сондай жағдайлардың мысалына броундық қозғалысты келтіруге болады. Кванттық жүйелердің өздері кездейсоқ және болжап болмайтын жағдайларда өмір сүреді деуге болады. Кванттық нысандардың (бөлшектер немесе өрістер) басқа да нысандармен және қоршаған ортамен әсерлесуі олардың күйлерінің флуктуациясы мен стохастылығының жоғарылауына себепкер болады.

Квантты-механикалық зерттеуді кездейсоқ процестер теориясы арқылы жүргізуге деген талпыныстардың жасалуы заңды құбылыс, себебі кездейсоқтық сипат кванттық құбылыстардың табиғаты кездейсоқтыққа негізделгені әу бастан белгілі жағдай. Алайда, толқындық функцияның тікелей ықтималдылық мағынасының болмауынан кванттық процеске толықтай кездейсоқтық сипат беруге болмайды. Шредингер өзінің толқындық функциясын ықтималдылық теориясының классикалық үлгісінен шығарып алғысы келді. Осы идеяны негізге ала отырып ұсынылып отырған мақалада кванттық механиканы ықтималдылықтар терминдері (үлестірім функциясы) арқылы көрсету мәселесі шешілетін болады. Бұл жерде кванттық механиканың жаңа бір кейіпі ұсынылған деп түсініп қалмау керек, біз бар болғаны қолданбалы және практикалық есептеулер үшін пайдалы болатын баламалы көзқарасты туралы баяндайтын боламыз. Бұл ретте кванттық механикада қамтылған құбылыстар мен процестердің ішінде стохастылық сипаты барларына ерекше тоқталып, соларға қатысты бірқатар есептеулерді орындайтын боламыз. Атап айтқанда, квантты-механикалық операторға қатысты шаманың импульстік көріністегі бірөлшемді орташасын комплексті сипаттағы квазиықтималдылық функциясы арқылы өрнектеу. Квазиықтималдылық

функцияның өрнегін тығыздық матрицасы арқылы жазу. Стационарлық жағдайдағы квазиықтималдылық функциясы бойынша орташаланған өрнектерді анықтау. Квазиықтималдылық функциясы арқылы комплексті фазалық кеңістіктегі стохастлық процесті қарастыру мәселесін тығыздық матрицасына арналған дифференциалдық теңдеу арқылы шешу. Ықтималдылық тығыздығына арналған теңдеуден диффузиялық марктік процеске арналған Фоккер–Планк теңдеуіне құрылым жағынан сәйкес келетін жуықталған комплекстік теңдеуге ауысу жағдайлары көрсетілді. Кездейсоқ процестер мен квазиықтималдылық функциясының арасындағы байланыстарды анықтап беретін комплексті теңдеуге сәйкес келетін және кванттық–механикалық есептеулерге қажетті барлық мәліметтер қамтылған стохастылық дифференциалдық теңдеулерді шығарып көрсету. Квазиклассикалық жуықтаулардағы қозғалыс теңдеулерінің жүйесін шығарып алу.

Әдіснама

Стохастылық кванттық процестерді зерттеп, зерделеу үшін ашық жүйелердің кванттық теориясы мен ықтималдылықтар теориясының әдістері, сонымен бірге стохастылық интегралдар мен кванттық теңдеулер секілді арнайы математикалық аппараттар қолданылады. Түйінді (маңызды) материалдар қатарына Линдبلاد теңдеуін, стохастылық дифференциалдық теңдеулерді (СДТ) және тығыздық матрицаларын жатқыза аламыз. Бұлар сыртқы шулар мен кездейсоқ флуктуациялардың кванттық жүйеге әсерлерін ескеруге жағдай жасайды. Сыртқы ортамен әсерлесе алатын жүйелерді зерттейтін заңдылықтар тобына ашық жүйелердің кванттық теориясы деп қарауға болады. Бұл әсерлесулер энергияның диссипаттылығы мен декогеренттілігіне жеткізеді, сондықтан да олар стохастылық процестер тізіміне қосылады [2,3]. Линдبلاد теңдеу сыртқы шулар мен диссипаттылық әсердегі кванттық жүйенің динамикасын сипаттап бере алады. Ал, тығыздық матрицасы–аралас және шатасқан күйлердегі кванттық жүйені толығымен егжей–тегжейлі зерттей алатын математикалық нысан. СДТ кездейсоқ құраушылары (компоненттері) бар процестерді модельде үшін, басқаша айтқанда кванттық жүйенің іс–әрекетін болжау мақсатында қолдануға болады. Кванттық механикадағы бөлшектер болжауға келетін нысандар сипатында емес, керісінше ықтималдылық заңдылықтар шеңберінде өмір сүреді және олардың жай–күйі толқындық функциялар арқылы сипатталынатыны белгілі. Стохастылық тәсілдер болса кездейсоқтыққа табиғаттың іргелі (фундаменталды) бөлігі ретінде қаруға негізделген.

Нәтижелер мен Талқылау

Алдымен теріс мәнді де, нақтылы да емес квазиықтималдылық функциясын енгізіп алайық (оның мағынасы алдағы есептеулер барысында айқындалатын болады). Қандай да бір жалпылама $L^{\wedge}$ операторына тиесілі L шамасының тек x айнымалысы бойынша квантты–механикалық орташасын төмендегідей өрнек арқылы анықтауға болады:

$$\bar{L} = \int \psi^*(x) \hat{L} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx \quad (1)$$

Осы өрнектегі толқындық $\psi(x)$ функцияны импульс операторының меншікті функциялары бойынша жіктеп, нәтижені (1)-ге қойып, мынадай теңдікке қол жеткіземіз:

$$\bar{L} = \int \frac{dx dp}{2\pi\hbar} \psi^*(x) c(p) \hat{L} \exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\} \equiv \int dx dp \omega(x, p) L(x, p) \quad (2)$$

Мұндағы

$$\omega(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \psi^*(x) c(p) \exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\} \quad (3)$$

үлестірім функциясы, ал $L(x, p)$ – $\hat{L}$ операторының $\exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\}$ функциясына әсер етуінен пайда болған $\hat{L}$ оператордың сандық көрінісі (бейнесі). Бұл есептеулер L шамасының квантты-механикалық орташасын кәдімгі (дәстүрлі) ықтималдылықтар теориясының терминдері түрінде (сипатында) өрнектеу, яғни үлестірім функциясынан алынған интегралдың L -ге көбейтіндісі арқылы анықтау мақсатында жүргізіліп отырғандығын айтып өту қажет. Тек ықтималдылықтар теориясы ұғымынан басты айырмашылық (ерекшелік) – үлестірім функциясының комплексті болуында. Мұндай функция *квазиықтималдылық функция* деп аталады. Осы келтірілген тұжырымдамалар бойынша $L(x, p)$ функциясын да комплексті деп санауға болады [4]. Жүйенің күйі $\rho(x, x')$ кейіптегі тығыздық матрицасы арқылы сипаталған жағдайда екі параметрлік квазиықтималдылық функциясы мына түрде анықталады:

$$\omega(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \rho(x, x') \exp \left\{ ip \left(\frac{x-x'}{\hbar} \right) \right\} dx' \quad (4)$$

Координата мен импульс ықтималдылықтарының $\omega(x)$ және $\omega(p)$ бір параметрлік тығыздықтары (4) – арқылы берілген квазиықтималдылық функциясы арқылы анықталатынын түсіну қиын емес:

$$\omega(x) = \int \omega(x, p) dp = \int \frac{dx' dp}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{ip(x-x')}{\hbar} \right\} \rho(x', x) = \int \delta(x-x') \rho(x', x) dx' = \rho(x, x) \quad (5)$$

Енді осы келтірілген тұжырымдамалардың іс-жүзіндегі қолданысы ретінде $\hat{H}$ және $\hat{H}^2$ операторларының с-көріністегі өрнектерін жазып өтейік. Гамильтон операторының $\exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\}$ функциясына әсері

$$\hat{H} \exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\} = \left(\frac{p^2}{2m} + U(x) \right) \exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\}$$

болса, осыдан

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad (6)$$

яғни, бұл классикалық үлгімен сәйкес келіп отыр. Алайда, $\hat{H}^2$ операторының $H^2(x, p)$ түріндегі с-көрінісі $H^2(x, p)$ -ға тең болмайды. Шынында да, $\hat{H}^2$ операторының $\exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\}$ функциясына әсері

$$\hat{H}^2 \exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\} = H_2(x, p) \exp \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \right\} \quad (7)$$

Осыдан

$$H_2(x, p) = \left(\frac{p^2}{2m} + U(x) \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{i\hbar p}{m} \frac{dU}{dx} \quad (8)$$

Стационарлық жағдайда $\langle H_2(x, p) \rangle = \langle H^2(x, p) \rangle$ теңдігі орындалады және бұдан

$$\frac{\hbar}{2} \left\langle \frac{d^2 U}{dx^2} \right\rangle + i \left\langle p \frac{dU}{dx} \right\rangle = 0 \quad (9)$$

Бұл теңдіктегі $\langle \rangle$ белгі квазиықтималдылық функциясы бойынша орташалау дегенді білдіреді [5,6]. $U=ax^2+bx+c$ түрдегі квадраттық потенциал жағдайында (6)–қатынас мынадай ықшамды кейіпке келеді: $\langle xp \rangle = \frac{i\hbar}{2}$.

Енді квазиықтималдылық функцияның (4)–түрдегі жазылу үлгісі арқылы комплексті фазалық кеңістіктегі қандай да бір стохастылық процесті сипаттауға болатындығын дәлелдейік. Ол үшін төмендегі тығыздық матрицасына арналған теңдеу қоданылады:

$$i\hbar \frac{\partial \rho(x, x', t)}{\partial t} = (\hat{H} - \hat{H}') \rho(x, x', t) \quad (10)$$

$U(x')$ потенциялын x нүктесінде Тейлор қатарына жіктеп, (10)-ның екі жағын x' координатасы бойынша Фурье түрлендірулерін қолдансақ, нәтижеде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{dU}{dx} \frac{\partial \omega}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^{n-1} \frac{d^n U}{dx^n} \frac{\partial^n \omega}{\partial p^n} \quad (11)$$

Бұл теңдеуде $\hbar$ –қа қатыссыз мүшелер нақтылай жазылған, сондықтан бұл теңдеуді Лиувилл теңдеуінің кванттық жағдайлар үшін жазылған түрі деп қабылдауға болады, шынында да $\hbar=0$ шартында (11)-теңдеу аталған теңдеуге өтеді. Бұл жағдайда квазиықтималдылық кәдуілгі ықтималдылыққа (нақты оң мәнді функцияға) айналады. Сонымен бірге, (11)-теңдеу түр-сипаты жағынан марктік кездейсоқ процестің ықтималдылық тығыздығына арналған дифференциалдық кейіптегі Смолуховский теңдеуіне де сәйкес келеді. (11)-теңдеудің оң жағындағы қатар тезірек жинақталады деп алып және $\hbar$ бойынша құраушылардың бірінші дәрежесі бойынша ғана мүшелерді сақтай отырып төмендегідей жуықталған теңдеуге өте аламыз:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{dU}{dx} \frac{\partial \omega}{\partial p} - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{i\hbar}{2} \frac{d^2 U}{dx^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \quad (12)$$

Бұл теңдеу құрылымы жағынан диффузиялық марктік процеске арналған белгілі Фокер–Планк теңдеуіне (ФПТ) сәйкес келетінін және (11) мен (12) теңдеулер комплекстік екендігін айта кетуіміз керек. (12)–теңдеудің көмегімен кездейсоқ процестер мен квазиықтималдылық функциясының арасындағы байланыстарға баға беруге болады, ол үшін осы теңдеуге сәйкес келетін СДТ алуды қарастырамыз. ФПТ оң мәнді диффузия коэффициенттері СДТ береді:

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} + (1 - i)\xi(t), \quad \dot{p}_z = -\frac{dU(z)}{dz} + \left(1 + i \operatorname{sign} \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right) \right) \eta(t) \quad (13)$$

Мұндағы ξ және η –гаусстық дельта–корреляцияланған кездейсоқ көздер;

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \frac{\hbar}{2m} \delta(\tau) \quad (14)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d^2 U}{dx^2} \right| \delta(\tau) \quad (15)$$

$$\langle \xi(t)\eta(t+\tau) \rangle = 0, \quad z = x + iy, \quad p_z = p_x + ip_y \quad (16)$$

Айта кетуіміз керек, $\hbar=0$ шартында (13)–теңдеулер комплекстілік табиғаты жойылады да Ньютонның классикалық теңдеуіне ауысады, ал $\omega(x,p)$ функциясы болса Лиувилл теңдеуін қанағаттандыратын нақты функцияға айналады. Ал, $\hbar \neq 0$ болған жағдайда (13)–комплекті СДТ үлестірі функциясы $Q(z, p_z)$ болатын диффузиялық марктік процесті сипаттайтын болады, әрине бұл жерде $Q(z, p_z)$ – кәдуілгі ықтималдылық мағынасындағы (нақты және теріс емес) және ФПТ қанағаттандыратын функция. Ол квазиықтималдылықпен мына түрде байланысқан:

$$\int L(x, p) \omega(x, p) dx dp = \int L(z, p_z) Q(z, p_z) d^2 z d^2 p_z \quad (17)$$

Егер де $L(x) = \exp\{i\lambda x\}$ болса (λ –параметр), онда теңдіктің оң жағындағы $\omega(x) = \rho(x, x)$ үлгісінде квантты–механикалық орташа үшін төмендегідей нәтиже аламыз:

$$\int \exp(i\lambda x) \omega(x) dx = \int \exp(i\lambda z) Q(z) d^2 z = \langle \exp(i\lambda z) \rangle_Q \quad (18)$$

яғни, $\omega(x)$ –тің Фурье түрлендіруі $\exp\{i\lambda x\}$ функциясының $Q(z)$ бойынша орташасына тең. Кері түрлендіру жасау арқылы $\omega(x)$ –тің $Q(z)$ арқылы жазылған өрнегін алуға болады:

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int \langle \exp(i\lambda z) \rangle_Q \exp(-i\lambda x) d\lambda \quad (19)$$

(17) және (19) теңдеулерде СДТ негізделген барлық кванттық–механикалық есептеулерге қажетті деген мәліметтер қамтылған [7, 8].

Комплекті стохастылық дифференциалдық теңдеулерді (11)–теңдеумен зерттелетін жалпы жағдайлар үшін жазайық. Ол үшін тағы да (13)–ға әкелетін шарттар мен көзқарастырды басшылыққа алу керек болады. Марктік процестерге арналған СДТ мен ықтималдылық тығыздығының бірөлшемді теңдеуі арасындағы сәйкестілік ережелерін қолдану арқылы төмендегідей нәтижелерге қол жеткізуге болады:

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} + (1 - i)\xi(t) \quad (20)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{dU}{dz} + \sum_{s=1}^M \Phi_s(z) \eta_s(t) \quad (21)$$

Бірінші тұрған (20)–теңдеу потенциалдың түр–сипатына тәуелсіз және ол бұрынғы кейпін өзгертпеді (13–тің бірінші теңдеуіне қараңыз), себебі (11)–теңдеуде x бойынша алынатын туындылар екінші дәрежеден аспады. (21)–теңдеу болса жалпы саны M

тәуелсіз дельта-корреляцияларға тәуелді болып қалды. Бұл теңдеудегі M және Φ_z шамалары барлық $n \geq 2$ үшін төмендегі теңдікті қанағаттандыра алады:

$$-\left(\frac{\hbar}{i}\right)^{n-1} \frac{d^n U(z)}{dz^n} = \sum_{s=1}^M D_{n,s} \Phi_s^n(z) \quad (22)$$

Әрі қарай

$$\psi \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \exp \left\{ \pm \left(\frac{i}{\hbar} \right) \int p dx \right\}, \quad (23)$$

$$p = \pm \sqrt{2m(E - U(x))} \quad (24)$$

түрдегі толқындық функция жағдайындағы квазиклассикалық СДТ шығарып алу мәселесін шешуді қарастыратын боламыз. Бұларды (14)–теңдеулермен салыстырсақ, тек (14в)–мен ғана айырмашылығы бар. (24)–ті p_z үшін жазайық:

$$p_z = \pm \sqrt{2m(E - U(z))} \quad (25)$$

Бұл шаманы бірімәнді етіп анықтау жолында мынадай қиындықтар [9] кездеседі: берілген бастапқы шарттарда екі түрлі уақыт мезеттері үшін p_z –тің екі түрлі мәндері сәйкес келеді. Осындай екі ұштылықты (бір мәнсіздікті) жою үшін $p_z(z)$ -тен $p_z(t)$ -ға ауысу керек болады. (25)–ті уақыт бойынша дифференциалдаған соң (20)–ны ескеретін болсақ, нәтижеде:

$$\dot{p}_z = \frac{-m \left(\frac{dU}{dz} \right) \dot{z}}{\pm \sqrt{2m(E - U(z))}} = -\frac{dU}{dz} \left(1 + \frac{1-i}{\frac{p_z}{m}} \xi(t) \right) \quad (26)$$

Осыны (20)–мен біріктіру арқылы квазиклассикалық жағдайдағы қозғалыс теңдеулерінің жүйесін аламыз:

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} + (1-i)\xi(t), \quad \dot{p}_z = -\frac{dU}{dz} \left(1 + \frac{1-i}{\frac{p_z}{m}} \xi(t) \right) \quad (27)$$

Бұл теңдеулерде энергия–комплекстік z және p_z шамаларының функциясы, яғни теңдеулердің әрбір шешімдерінде $E = \frac{p_z^2}{2m} + U(z)$ шамасы тұрақты болып отырады. Ал, (13) және (14)–стохастық дифференциалдық теңдеулерінде комплекссті фазалық кеңістіктегі әрбір траекторияның бойындағы энергияның флуктуациялары ескерілген.

Енді, осыған дейін алынған нәтижелерді жан-жақты талқылап өтейік. Комплекссті фазалық кеңістіктегі стохастылық траекториялар $Q(x, u, p_x, p_{y,t})$ –ықтималдылық функциясының уақыт бойынша өзгеру қарқынын модельдеп бере алады, ал өз кезегінде $Q(x, u, p_x, p_{y,t})$ функциясы болса, (19)–ға сәйкес, тығыздық матрицасына эквивалентті квазиықтималдылық функциясының эволюциясына $(\omega(x, p, t))$ қолдау көрсетеді. Ықтималдылық амплитудасынсыз-ақ барлық түрдегі квантты-механикалық орташаларды Q арқылы шығарып алуға болады [10, 11]. (13), (14) және (26)–теңдеулерінің шешімдерін анықтау үшін алдымен бұл теңдеулерге қойылатын бастапқы шарттарды белгілеп алуымыз қажет. СДТ үлестірім функциясының ағымына (өзгеру

жағдайларына) жауапты болғандықтан, бастапқы шарттар $\{x_0, y_0, p_{0x}, p_{0y}\}$ түрдегі мәндер жиіні арқылы беріледі де бастапқы күйлерге сәйкес келетін $Q\{x_0, y_0, p_{0x}, p_{0y}\}$ функцияларының салмағына қарай таралып (бөлініп, үлестіріліп) отырады. Үлестірім функциясының $t \neq 0$ уақыт мезетіне сәйкес келетін мәнін алу үшін СДТ бастапқы шарттардың жиынындағы әрбір мән үшін шешіп, жиындағы әрбір бастапқы мәнді ξ және η бойынша орталашалап шығу керек.

Алайда, қарастырылып жатқан бұл мәселе (жағдай, көзқарас, ұстаным) квазиклассикалық жағдайларға өткен кезде анағұрлым жеңілдейді (оңтайланады). Мысалы, екі немесе одан да көп бөлшектердің белгілі бір потенциал бойынша әсерлесулеріне қатысты есепте бөлшектің бастапқы күйін фазалық кеңістіктегі бір ғана нүкте арқылы сипаттауға болады. Осыған байланысты, көп бөлшекті жүйеге арналған Ньютон теңдеуін шешуге негізделген молекулалық динамика және классикалық траекториялар тәсілдерін кванттық механика үшін пайдалансақ кванттық механиканың стохасты сипатын едәуір ашып көрсету мәселесі айқынырақ шешілері анық. Бұл тәсілдерді кванттық әлемге қолдану кезінде оларды түбегейлі өзгертудің қажеттілігі жоқ, тек нақтылы фазалық айнымалыларды комплексті айнымалылармен алмастырып, алынған комплексті сипаттағы қозғалыс теңдеулеріне ξ және η секілді стохастылық құраушыларды қосу жеткілікті.

Қорытынды

Мақала тақырыбына сәйкес кванттық механиканы ықтималдылықтар теориясы терминінде көрсетуге қатысты мәселелер өз шешімдерін тапты деп айтуға болады. Квантты–механикалық операторға сәйкес келетін шаманың импульстік көріністегі орташасы комплексті квазиықтималдылық функциясы арқылы өрнектелді. Жүйенің күйін тығыздық матрицасы арқылы сипаттау жағдайындағы квазиықтималдылық функциясы анықталды. Осы арқылы Гамильтон операторының классикалық үлгімен сәйкес келетін және сәйкес келмейтін сандық көріністегі жазылу үлгісі көрсетілді. Стационарлық жағдайға сәйкес келетін квазиықтималдылық функциясы бойынша орташаланған өрнектер жазылды. Квазиықтималдылық функциясымен комплексті фазалық кеңістіктегі қандай да бір стохастылық процесті сипаттау мүмкіндігі тығыздық матрицасына арналған дифференциалдық теңдеу арқылы дәлелденді. Бірқатар есептеулердің көмегімен Планк тұрақтысының нөлге тең болатын жағдайында бұл теңдеу кванттық құбылыстарға арналған Лиувилл теңдеуіне ауысатындығы және де квазиықтималдылық функциясының кәдуілгі ықтималдылыққа айналатындығы (нақты оң мәнді функция кейпін өтетіндігі) көрсетілді. Ықтималдылық тығыздығының теңдеуінен құрылымы жағынан диффузиялық марктік процеске арналған Фокер–Планк теңдеуіне сәйкес келетін жуықталған комплекстік теңдеуге ауысу жағдайлары дәлелденді. Кездейсоқ процестер мен квазиықтималдылық функциясының арасындағы байланыстарды анықтау үшін алынған комплекстік теңдеуге сәйкес келетін және кванттық–механикалық есептеулерге қажетті барлық мәліметтер қамтылған стохастылық дифференциалдық теңдеулер алынды.

z және p_z шамаларына қатысты теңдеулердің стационарлығы мен қайтым-

дылығына тоқталар болсақ, жоғарыда келтірілген көзқарастар стационар шешімдерді анықтауды көздемейді, себебі стационарлы бастапқы шарттар алдын-ала беріледі (белгілі) деп есептеледі. Егер де стационарлы үлестірім функциясы анықталған болса, онда $\omega(x, p)$ –квазиықтималдылық функциясы уақыт бойынша белгісіз күйде қала береді. Бұл жағдайда $Q(z, p_{z,t})$ функциясы стационарлы бола алмайды. Айтылып жатқан осы мәселелерді тиянақтай келе мындай қорытынды жасауға болады: классикалық процестер секілді кванттық процестер де уақытқа қатысты қайтымды болып келеді, яғни $|\psi|^2$ -тың өзгеріс заңдылығы арқылы уақыттың бағытын анықтау мүмкін емес. Мақала теориялық сипатта болғандықтан, оған сандық әдістер бойынша модель құрылу жоспарланбады. Әрине, осындай модель құру арқылы (3), (4) және (11)–өрнектердегі параметрлерге сандық өлшемдер беру арқылы квантты–механикалық шамалар мен кездейсоқ шамалар арасындағы графиктік тәуелділіктерді көрсетуге болады. Бұларды авторлардың алдында тұрған келесі бір мәселелер тізбегі деп қабылдауға болады, яғни олар осы тұста айтылған тұжырымдамаларды алдағы уақытта іске асыруға мүдделі. Ол үшін мақала тақырыбына сәйкес келетін модел шарттарын құрып алу керек, одан соң арнайы алгоритм арқылы кез–келген тәуелділікті дифференциалдық теңдеулердің сипаттамалық графиктерін тұрғызуға мүмкін болады.

Авторлардың қосқан үлесі

Т.Б. Қоштыбаев – мақаланың теориялық физикаға қатысы болғандықтан, тақырыптың идеясы бойынша жоспарын түзіп, мақала мәтініндегі есептеулердің басым көпшілігін орындады. Солардың ішінде атап өтетіндері: квантты–механикалық операторға тиесілі шаманың импульстік көріністегі бір өлшемді орташа мәнін комплексті сипаттағы квазиықтималдылық функциясы арқылы өрнектеу; толқындық функцияның ерекшелігіне сәйкестендірілген квазиклассикалық стохастылық дифференциалдық теңдеулер және квазиклассикалық жуықтаулардағы қозғалыс теңдеулерінің жүйесін шығарып алу және т.с.с. Мақаланың талапқа сай рәсімделуіне де атсалысқан. Тақырыпқа сай қазіргі заманғы зерттеулерді саралап, әдебиеттер тізімін жасауға үлес қосқан. Ілеспе хатты әзірлеп, редакцияға жолдауды іске асыруға да басшылық жасаушы.

Ш. Алиев – мақаланың кіріспе бөлігіне қажетті материалдарды дайындады және мақаланың қорытынды бөлімін жазып шықты. Он тоғыз және жиырма екінші өрнектердің математикалық есептеулерін жүргізді.

М.Е. Алиева – жүйенің күйі тығыздық матрицасы арқылы сипаталатын жағдай үшін квазиықтималдылық функциясының өрнегін есептеп шығаруға атсалысушы. Сол арқылы Гамильтон операторының классикалық үлгісімен сәйкес келетін және сәйкес келмейтін сандық көрінісін сипаттауды орындаушы. Мақаланың талапқа сай рәсімделуіне де атсалысқан, аңдатпаның орыс және ағылшын мәтіндерін жазды, әдебиеттер тізімінің ағылшын нұсқасын жасады және мақаланы сайт арқылы редакцияға жолдады.

К.К. Жантлеуов – мақаладағы математикалық есептеулердің ережелер мен заңдылықтар аясында орындалуын қадағалады және Фоккер–Планк теңдеуіне құрылымдық жағынан ұқсас жуықталған комплекстік теңдеуге ауысу шарттарын ұсынды. Әдебиеттер тізімін жасақтау кезінде шетелдік басылымдарды саралап шықты.

Н.А. Сандибаева – стационарлық жағдай үшін квазиықтималдылық функциясы бойынша орташаланған өрнектерін анықтап шықты және мақаланы редакциялауға атсалысты. Квазиықтималдылық функциясының көмегімен комплексті фазалық кеңістікте өтетін қандай да бір стохастылық процестер тығыздық матрицасына арналған дифференциалдық теңдеу арқылы зерттеулерді жүргізді. Мақаланың қорытынды бөлімін жазуға атсалысушы. Пайдаланылған әдебиеттер тізіміндегі дереккөздердегі тақырыптың ауқымын белгілеуші.

А.Т. Жавлиева – ықтималдылық тығыздығына арналған теңдеуден диффузиялық марктік процеске арналған Фокер–Планк теңдеуіне құрылымдық жағынан ұқсас жуықталған комплекстік теңдеуге ауысу жағдайларын көрсетуге қатысты. Әдебиеттер тізімін жасақтауға атсалысты. Ілеспе хатты әзірлеуге, оны редакцияға жолдауға көмектесті.

Әдебиеттер тізімі

1. А.Я. Хинчин, Математические основания квантовой статистики. (Ленанд, Москва, 2017), с. 256
2. А.А. Бирюков, Модель стохастического процесса в пространстве случайных совместных событий, Вестник СГТУ. № 25 (4), с. 787–796 (2021), DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1865>
3. А.С. Дубровин, Квантовый полумарковский системный анализ и обработка информации в стохастической модели с интерферирующими нецелевыми состояниями. Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. № 2, с. 25–38 (2024), DOI: <https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2024/2/25-38>
4. A.O. Barvinskij, G. H. S. Kamargo, A. E. Kalugin, N. Ohta, I. L., Shapiro Local term in the anomaly-induced action of Weyl quantum gravity, Physical Review D, 108 (8), p. 086018 (2023), DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.108.086018>
5. E.V. Karachanskaya, Programmed control with probability 1 for stochastic dynamical systems, Journal of Mathematical Sciences (United States) 248 (1), p 67–79 (2020), DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04856-4>
6. V. J. Bevia, S. Blanes, J. C. Cortés, N. Kopylov, R. J. Villanueva. A GPU-accelerated Lagrangian method for solving the Liouville equation in random differential equation systems, Applied Numerical Mathematics 208 (B), p. 231-255 (2025), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2024.09.021>
7. Toma Yoneyaa, Kazuya Fujimoto, Yuki Kawaguchi, Path-integral formulation of truncated Wigner approximation for bosonic Markovian open quantum systems, Annals of Physics 479, p. 170072 (2025), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2025.170072>
8. Siddharth Das, Stefan Krause, Kay-Uwe Giering, Ricardo J.B. Pousa, Riccardo Bassoli, Frank H. P. Fitzek, Leveraging quantum uncertainty: Quantum randomness through the lens of classical communication networks, Computer Networks 254, p. 110781 (2024), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.comnet.2024.110781>
9. Ali Raza, Feliz Minhós, Umar Shafique, Muhammad Mohsin, Mathematical Modeling of Leukemia within Stochastic Fractional Delay Differential Equations, Computer Modeling in Engineering and Sciences 143 (3), p. 3411-3431 (2025), DOI: <https://doi.org/10.32604/cmes.2025.060855>

10.Sangwon Lee, Taro Yaoyama, Masaru Kitahara, Tatsuya Itoi, Latent space-based stochastic model updating, Mechanical Systems and Signal Processing 235, p. 112841 (2025), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112841>

11. Pushpa Pandey, Nidhal Jamia, Tanmoy Chatterjee, Hamed Haddad Khodaparast, Michael Ian Friswell, Modelling and stochastic updating of nonlinear structural joints, Mechanical Systems and Signal Processing 232, p. 112697 (2025), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112697>

**Т.Б. Коштыбаев¹, Ш. Алиев², М.Е. Алиева³, К.К. Жантлеуов³,
Н.А. Сандибаева¹, А.Т. Жавлиева¹**

¹Казахский национальный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

²Кыргызский государственный университет им. И. Арабаева, Бишкек, Кыргызстан

³Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстаны

(E-mail: ¹koshtybayev70@mail.ru, ²alidoc2010@mail.ru, ³moldir-2008@mail.ru,

³Kzhantleuov@mail.ru, ¹nazirasandibaeva@gmail.com, ¹zhavliyeva.11@gmail.com)

Стохастическая интерпретация квантовой механики

Аннотация. Рассмотрена проблема о выражений (описания и объяснения) квантовой механики в терминах теории вероятностей, решение которого было продемонстрировано через результаты расчетов, основанных на определенных принципах (взглядах и постулатах). В частности, среднее значение величины, принадлежащей квантно-механическому оператору в импульсном представлении, выражено через комплексную функцию квазивероятности. Была найдена соотношение функции квазивероятности, для случая, когда состояние системы описывается матрицей плотности. Рассмотрено численное представление оператора Гамильтона, соответствующее и не соответствующее классической модели. Определены усредненные выражения по функции квазивероятности для стационарного случая. Задача об описании какого-либо стохастического процесса, происходящего в комплексном фазовом пространстве, с помощью функции квазивероятности, была решена с помощью дифференциального уравнения для матрицы плотности. Доказаны, что данное уравнение переходит в уравнение Лиувилля для квантовых явлений при нулевом значении постоянной Планка и превращение функции квазивероятности в обычную вероятность (конкретную положительную функцию). Показаны условия перехода от уравнения для плотности вероятности к приближенному комплексному уравнению, структурно соответствующему уравнению Фоккера-Планка для диффузионного марковского процесса. Представлены стохастические дифференциальные уравнения, соответствующие комплексному уравнению, которое определяют связи между случайными процессами и функцией квазивероятности, и включающие все необходимые сведения для квантово-механических расчетов. В конце статьи были выведены система уравнений движения в квазиклассических приближениях и стохастические дифференциальные уравнения, относящихся к общему случаю и особенностям волновой функции. Все результаты вычисления и утверждения были детально обсуждены и по ним были сделаны необходимые выводы.

Ключевые слова: стохастические уравнения, случайные процессы, волновая функция, плотность вероятности, квантово-механическая среда, оператор, матрица плотности, функция распределения.

T.B. Koshtybayev¹, Sh. Aliev², M.E. Aliyeva³, K.K. Zhantleuov³, N.A. Sandibaeva¹, A.T. Zhavliyeva¹

¹Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

²Kyrgyz State University named after I. Arabaev, Bishkek, Kyrgyzstan

³Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

(E-mail: ¹koshtybayev70@mail.ru, ²alidoc2010@mail.ru, ³moldir-2008@mail.ru,

³Kzhantleuov@mail.ru, ¹nazirasandibaeva@gmail.com, ¹zhavliyeva.11@gmail.com)

Stochastic interpretation of quantum mechanics

Abstract. The paper addresses the problem of expressing (describing and interpreting) quantum mechanics in terms of probability theory. The solution is demonstrated through computational results based on certain principles, (viewpoints and postulates). In particular, the expectation value of a quantity corresponding to a quantum mechanical operator in the momentum representation is expressed via a complex quasi-probability function. A relation for the quasi-probability function is obtained for the case where the state of the system is described by a density matrix. The numerical representation of the Hamiltonian operator is examined, both in forms that correspond to and deviate from the classical model. Averaged expressions with respect to the quasi-probability function are derived for the stationary case. The problem of describing a stochastic process occurring in complex phase space using a quasi-probability function was addressed by means of a differential equation for the density matrix. It was proven that this equation reduces to the Liouville equation for quantum phenomena in the limit of a vanishing Planck constant, and that the quasi-probability function transforms into an ordinary probability distribution (a specific positive function). Conditions were established under which the equation for the probability density transitions into an approximate complex equation structurally analogous to the Fokker–Planck equation for a diffusive Markov process. Stochastic differential equations corresponding to this complex equation were presented, which define the connections between random processes and the quasi-probability function and incorporate all necessary information for quantum-mechanical calculations. Finally, a system of motion equations in the quasi-classical approximation and stochastic differential equations relevant to the general case and characteristics of the wave function were derived. All computational results and theoretical assertions were thoroughly discussed, and the necessary conclusions were drawn.

Keywords: stochastic model, random processes, wave function, probability density, quantum-mechanical environment, operator, density matrix, distribution function.

References

1. A.Ja. Hinchin, Matematicheskie osnovaniya kvantovoj statistiki [Mathematical foundations of quantum statistics] (Lenand, Moscow, 2017), p. 256 [in Russian]
2. A.A. Birjukov, Model' stohasticheskogo processa v prostranstve sluchajnyh sovmestnyh sobytij [A model of a stochastic process in the space of random joint events], Vestnik SGTU [Bulletin of SSTU] № 25 (4), p. 787–796 (2021), DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1865> [in Russian]
3. A. S. Dubrovin, Kvantovyy polumarkovskij sistemnyj analiz i obrabotka informacii v stohasticheskoy modeli s interferirujushhimi neceleвыми sostojanijami [Quantum semi-Markov system analysis and information processing in a stochastic model with interfering non-target states], Vestnik VGU. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii [Bulletin of the VSU. Series: System Analysis and Information Technology] № 2, p. 25–38 (2024), DOI: <https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2024/2/25-38> [in Russian]

4. A.O. Barvinskij, G. H. S. Kamargo, A. E. Kalugin, N. Ohta, I. L., Shapiro Local term in the anomaly-induced action of Weyl quantum gravity, *Physical Review D*, 108 (8), No 086018 (2023), DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.108.086018>
5. E.V. Karachanskaya, Programmed control with probability 1 for stochastic dynamical systems, *Journal of Mathematical Sciences (United States)* 248 (1), p 67–79 (2020), DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04856-4>
6. V. J. Bevia, S. Blanes, J. C. Cortés, N. Kopylov, R. J. Villanueva. A GPU-accelerated Lagrangian method for solving the Liouville equation in random differential equation systems, *Applied Numerical Mathematics* 208 (B), p. 231-255 (2025), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2024.09.021>
7. Toma Yoneyaa, Kazuya Fujimoto, Yuki Kawaguchi, Path-integral formulation of truncated Wigner approximation for bosonic Markovian open quantum systems, *Annals of Physics* 479, No 170072 (2025), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2025.170072>
8. Siddharth Das, Stefan Krause, Kay-Uwe Giering, Ricardo J.B. Pousa, Riccardo Bassoli, Frank H. P. Fitzek, Leveraging quantum uncertainty: Quantum randomness through the lens of classical communication networks, *Computer Networks* 254, No 110781 (2024), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.comnet.2024.110781>
9. Ali Raza, Feliz Minhós, Umar Shafique, Muhammad Mohsin, Mathematical Modeling of Leukemia within Stochastic Fractional Delay Differential Equations, *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 143 (3), p. 3411-3431 (2025), DOI: <https://doi.org/10.32604/cmes.2025.060855>
10. Sangwon Lee, Taro Yaoyama, Masaru Kitahara, Tatsuya Itoi, Latent space-based stochastic model updating, *Mechanical Systems and Signal Processing* 235, No 112841 (2025), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112841>
11. Pushpa Pandey, Nidhal Jamia, Tanmoy Chatterjee, Hamed Haddad Khodaparast, Michael Ian Friswell, Modelling and stochastic updating of nonlinear structural joints, *Mechanical Systems and Signal Processing* 232, No 112697 (2025), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112697>

Авторлар туралы мәліметтер

Қоштыбаев Т.Б. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті физика кафедрасының профессоры м.а., Әйтеке би көшесі, 99, 050000, Алматы, Қазақстан

Алиев Ш. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, педагогика ғылымдарының докторы, И. Арабаев атындағы Қырғыз мемлекеттік университеті математика кафедрасының профессоры, Раззаков көшесі, 51, Бішкек, Қырғызстан

Алиева М.Е. – хат-хабар авторы, жаратылыстану ғылымдарының магистрі, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті физика кафедрасының аға оқытушысы, Достық даңғылы, 13, 050000, Алматы, Қазақстан

Жантлеуов К.К. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті математика кафедрасының доценті м.а., Достық даңғылы, 13, 050000, Алматы, Қазақстан

Сандибаева Н.А. – п.ғ.к., Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті физика кафедрасының қауымдастырылған профессоры, Алматы қ., Әйтеке би көшесі, 99, 050000, Алматы, Қазақстан

Жавлиева А.Т. – педагогика ғылымдарының магистрі, Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті физика кафедрасының оқытушысы, Алматы қ., Әйтеке би көшесі, 99, 050000, Алматы, Қазақстан

Koshtybayev T.B. – candidate of physical and mathematical sciences, Acting Professor, Department of Physics, Kazakh National Women's Pedagogical University, Aiteke bi street, 99, 050000, Almaty, Kazakhstan

Aliev Sh. – candidate of Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Mathematics the Kyrgyz State University named after I. Arabaev, Razzakov, 51, Bishkek, Kyrgyzstan

Aliyeva M.E. – the corresponding author, Master of sciences, Senior lecturer, Department of Physics, Abai Kazakh National Pedagogical University, Dostyk Ave., 13, 050000, Almaty, Kazakhstan

Zhantleuov K.K. – candidate of physical and mathematical sciences, Acting Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematical Modeling, Abai Kazakh National Pedagogical University, Dostyk Ave., 13, 050000, Almaty, Kazakhstan

Sandibaeva N.A. – the acting associate Professor, Candidate of Sciences, Kazakh National Women's Teacher Training University, Aiteke bi street, 99, 050000, Almaty, Kazakhstan

Zhavlijeva A.T. – master of Pedagogical Sciences, lecturer of the Department of physics of the Kazakh National Women's Teacher Training University, Aiteke bi street, 99, 050000, Almaty, Kazakhstan

Коштыбаев Т.Б. – кандидат физико–математических наук, и.о. профессора кафедры физики Казахского национального женского педагогического университета, ул. Айтеке би, 99, 050000, Алматы, Казахстан

Алиев Ш. – кандидат физико–математических наук, доктор педагогических наук, профессор кафедры математики Кыргызского государственного университета им. И. Арабаева, ул. Раззакова, 51, Бишкек, Кыргызстан

Алиева М.Е. – автор для корреспонденции, магистр естественных наук, старший преподаватель кафедры физики Казахского национального педагогического университета имени Абая, пр. Достык, 13, 050000, Алматы, Казахстан

Жантлеуов К.К. – кандидат физико–математических наук, и.о. доцента кафедры математики Казахского национального педагогического университета имени Абая, пр. Достык, 13, 050000, Алматы, Казахстан

Сандибаева Н.А. – к.п.н., ассоциированный профессор кафедры физики Казахского национального женского педагогического университета, ул. Айтеке би, 99, 050000, Алматы, Казахстан

Жавлиева А.Т. – магистр педагогических наук, преподаватель кафедры физики Казахского национального женского педагогического университета, ул. Айтеке би, 99, 050000, Алматы, Казахстан



Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).