Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің ХАБАРШЫСЫ.
ISSN: 2616-6836. eISSN: 2663-1296

АСТРОНОМИЯ СЕРИЯСЫ/ ASTRONOMY SERIES / СЕРИЯ АСТРОНОМИЯ

МРНТИ 29.05.41 https://doi.org/10.32523/2616-6836-2025-152-3-18-25

Решение для *F(R, X, φ)* модели в сферической метрике

К.К. Ержанов, А.Н. Амангельдиев, А.Б. Алтайбаева, Г.Б. Бауржан

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

(E-mail: aamangeldiev525@gmail.com)

Аннотация. В работе рассматриваются аналитические и численные подходы к построению решений в рамках обобщённой гравитационной модели вида *F(R, X, φ).* Особое внимание уделено исследованию метрик сферической симметрии, позволяющих изучить поведение гравитационных и скалярных степеней свободы в компактных объектах и космологических моделях. Показано, что введение нелинейной зависимости функции действия от комбинации *F(R, X, φ)* существенно расширяет класс допустимых решений по сравнению с традиционной *F(R)* – гравитацией. Анализируются условия существования статических и динамических решений, их устойчивость, а также возможные физические интерпретации в контексте модифицированной теории гравитации и астрофизики. Полученные результаты открывают перспективы для описания тёмной материи, тёмной энергии и гравитационных коллапсов в рамках единого формализма. Дополнительно рассматриваются возможные проявления модели в сценариях ранней Вселенной, включая инфляционную динамику и фазовые переходы, а также влияние на образование структур и эволюцию космологических возмущений. Подчёркивается роль численных методов в исследовании сложных режимов, где аналитические решения оказываются недоступными. Особое внимание уделяется сравнительному анализу с известными решениями в общей теории относительности, что позволяет выявить новые физические эффекты и ограничения на параметры модели. Представленные результаты могут быть полезны при разработке альтернативных космологических сценариев и в дальнейшем применены к анализу астрофизических наблюдений, включая гравитационно-волновые сигналы и динамику компактных звёздных объектов.

Ключевые слова: метрика Шварцшильда, тензор Риччи, уравнение Клейна – Гордона, радиальная координата, модифицированная гравитация

Поступила 27.09.2025. После доработки 28.09.2025. Принята к печати 30.09.2025. Доступно онлайн 30.09.2025.

*автор для корреспонденции

Введение

Современная космология и теория гравитации выходят за рамки классической общей теории относительности (ОТО), так как последние десятилетия наблюдательные данные указывают на наличие тёмной материи и тёмной энергии, природа которых остаётся неясной. Одним из наиболее продуктивных направлений исследований являются модифицированные гравитационные теории, в которых действие зависит не только от скаляра кривизны *R,* но и от дополнительных инвариантов и полей. К числу таких моделей относится обобщённая *F(R, X, φ)* – гравитация [1], где *X* описывает кинетический член скалярного поля, а *φ* играет роль динамической скалярной степени свободы.

Рассмотрение данной модели в сферически симметричной метрике является особенно важным, так как такие решения имеют непосредственное применение в астрофизике и космологии: они описывают строение компактных объектов, чёрных дыр, звёздных конфигураций, а также позволяют исследовать сценарии коллапса и расширения Вселенной. Сферическая симметрия при этом значительно упрощает математический анализ, сохраняя при этом физическую значимость решений.

Целью данной работы является исследование условий существования решений для *F(R, X, φ)* – модели в сферической метрике, анализ их устойчивости и возможных физических интерпретаций.

Теоретическая часть

Модель инкапсулирует богатый ландшафт гравитационных явлений, предоставляя возможности для изучения отклонений от общей теории относительности. Мы анализируем геодезическое движение как для массивных, так и для безмассовых частиц в сферически симметричном статическом пространстве-времени, обобщая метрики Шварцшильда в этой расширенной гравитационной структуре [2].

Для сферически симметричной статической метрики мы предполагаем:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + M(r)(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\varphi^2)\,, \tag{1}$$

где *A(r), B(r) и M(r)* определяются только из радиальной координаты *r.* Это стандартная форма метрики, описывающая сферически симметричное пространство-время, которая используется для анализа кручения и динамики в искривленном пространстве. Тензор Риччи для такой метрики можно описать следующим образом

$$R = -\frac{1}{B}\left(\frac{A''}{A} + \frac{2M''}{M} - \frac{A'}{2A}\frac{B'}{B} - \frac{M'B'}{MB} - \frac{A'^2}{2A^2} - \frac{M'^2}{2M^2} - \frac{2B}{M}\right). \tag{2}$$

Уравнения движения примет вид:

$$f_R\left(2\frac{A''}{A} - \frac{A'B'}{AB} - \frac{A'^2}{A^2} + 2\frac{M'A'}{MA}\right) = -2Bf + 4\left[f_R'' + f_R'\left(\frac{M'}{M} - \frac{B'}{2B}\right)\right], \tag{3}$$

$$f_R\left(2\frac{A''}{A}-4\frac{M''}{M}-\frac{A'B'}{AB}-2\frac{M'B'}{MB}-\frac{A'^2}{A^2}-2\frac{M'^2}{M^2}\right)=-2Bf+2f_R'\left(\frac{A'}{A}+2\frac{M'}{M}\right)-2\varepsilon f_X\varphi'^2, \tag{4}$$

$$f_R\left(2\frac{M''}{M}-\frac{B'M'}{BM}+\frac{M'A'}{MA}-\frac{4B}{M}\right)=-2Bf+4\left[f_R''+\frac{1}{2}f_R'\left(\frac{A'}{A}-\frac{B'}{B}+\frac{M'}{M}\right)\right]. \tag{5}$$

Уравнение Клейна – Гордона [3] выглядит следующим образом:

$$f_X\left[\varphi''+\frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{A'}{A}-\frac{B'}{B}+2\frac{M'}{M}\right)\right]+f_X'\varphi'+\varepsilon Bf_\varphi=0 \tag{6}$$

Объединяем уравнения (3), (4), (5), получаем следующее [4]:

$$2f_R'\frac{B'}{B}+\varepsilon f_X\varphi'^2-2\frac{B}{M}f_R+Bf=0, \tag{7}$$

где $f=(C_1R)^2+C_3X+C_4\varphi$, $f_R=2C_1^2R$, $f_X=C_3$. Если мы введем такие параметры что $A=B^{-1}$, $A'=-B^{-2}B'$, $A''=2B^{-3}B'^2-B'^{-2}B''$, $M=const$, мы можем подставить эти выражения в уравнение (64), и получим следующее [5]:

$$R=\frac{2}{M}-\frac{2B'^2}{B^3}+\frac{B''}{B^2}. \tag{8}$$

Заменяем выражение (7) на (8) получаем

$$\frac{8C_1^2}{M}-8C_1^2\frac{B'^2}{B^3}+4C_1^2\frac{B''}{B^2}-B\left(C_1^2\left(\frac{2}{M}-\frac{2B'^2}{B^3}+\frac{B''}{B^2}\right)^2+C_2^2X^2+2C_2XC_1\left(\frac{2}{M}-\frac{2B'^2}{B^3}+\frac{B''}{B^2}\right)+\frac{2C_3}{M}-2C_3\frac{B'^2}{B^3}+C_3\frac{B''}{B^2}\right)-$$
$$-2\left(\frac{B}{M}+\frac{B'}{B}\right)\left(C_1C_2X+C_3\right)+2C_1^2\left(\frac{2}{M}-\frac{2B'^2}{B^3}+\frac{B''}{B^2}\right)\frac{2B}{M}+2C_1^2\left(\frac{2}{M}-\frac{2B'^2}{B^3}+\frac{B''}{B^2}\right)2\frac{B'}{B}=0. \tag{9}$$

Если мы предположим что $C_3=-C_1C_2X$, $C_5=-XC_4-\frac{3C_3C_2}{4C_1}$, то мы можем получить следующее решение для $B(r)$:

$$B=\frac{4C_1^2M\left(4C_1^2+C_3M+2C_1C_2MX\right)}{M^2\left(\left(r+C_2\right)^2+16C_1^3+C_2MX\left(r+C_2\right)^2+4C_1C_2C_3M^2X\left(r+C_2\right)^2+4C_1^2M\left(2C_3+C_2^2MX^2\right)\left(r+C_2\right)^2+4C_1^4\left(4r^2-M^2C_1+8rC_2+4C_2^2\right)\right)}. \tag{10}$$

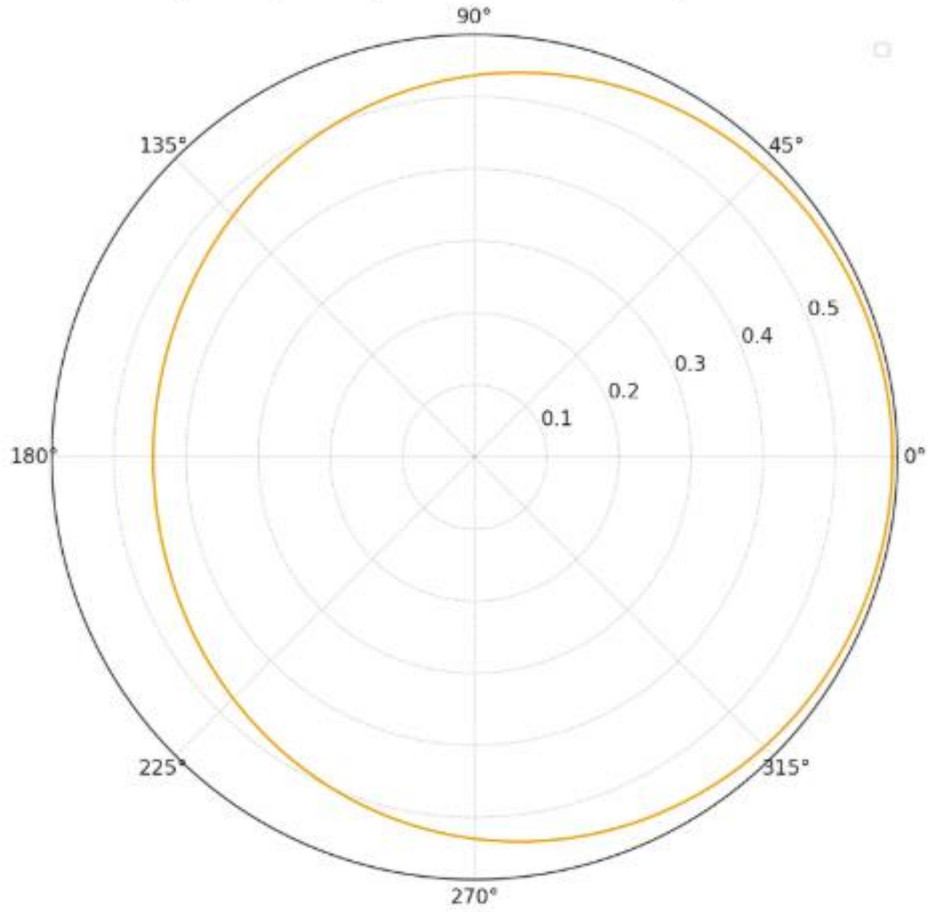

Рисунок 1. Движение частицы для решения B(r)

На рисунке приведена полярная кривая, полученная численным решением уравнения *r=B(r, θ).* Радиус-вектор *r(θ)* найден методом фиксированной точки для каждого угла. Полученное решение образует почти симметричную замкнутую кривую. Форма кривой демонстрирует слабую зависимость от угла *θ,* что соответствует почти круговой симметрии.

Теперь, если учесть, что *r* стремится к слишком большому значению, то из уравнений (3), (4), (5) можно получить f(r):

$$f(r)=1-\frac{2G_0M_0}{r}\left(1+\frac{G_0^2M_0^2\varepsilon}{6r}\right)^{-3} \tag{11}$$

График функции для этого решения выглядит следующим образом:

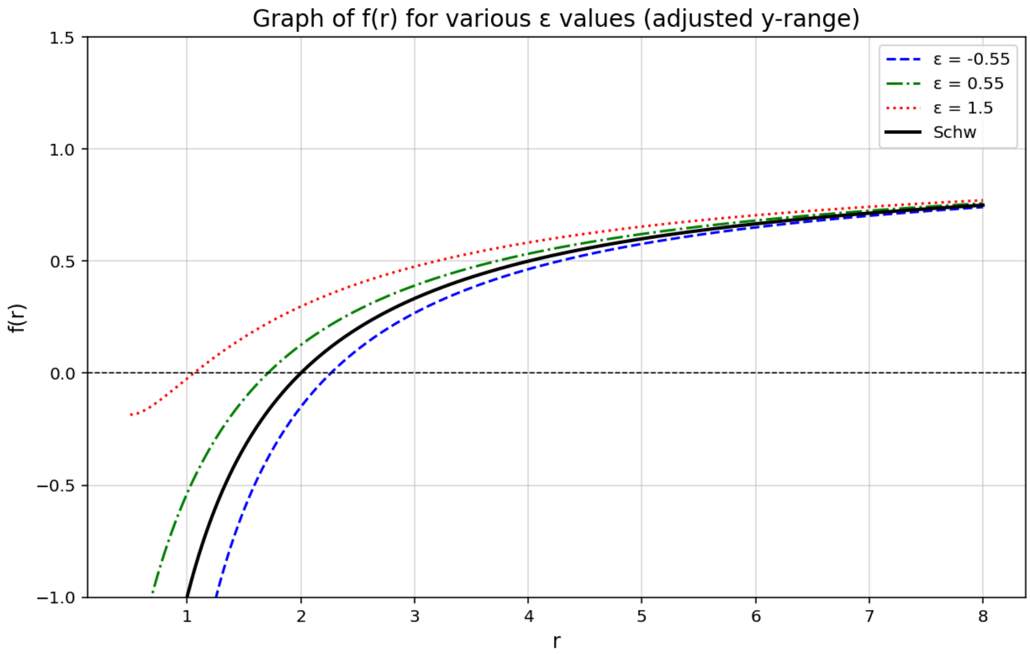

Рисунок 2 график для решения *f(r)* задачи Шварцшильда

Из графика видно, что при малых радиусах различие между кривыми существенно: отрицательные значения ε смещают положение горизонта событий $f(r)=0$ к большим r, а положительные значения уменьшают радиус горизонта. Однако при увеличении радиуса все решения постепенно сходятся к чёрной кривой, то есть к классическому Шварцшильдовскому решению. Таким образом, параметр ε влияет только на ближнюю область около горизонта, тогда как на больших расстояниях модифицированная метрика асимптотически совпадает с решением Шварцшильда.

Заключение

В рамках $F(R, X, \varphi)$ – модели в сферической метрике получены уравнения, описывающие динамику гравитационного поля и скалярной компоненты. Показано, что наличие дополнительных инвариантов и скалярного поля существенно расширяет класс возможных решений по сравнению с общей теорией относительности. В частности, изменяются свойства фотонной сферы и параметры сильного гравитационного линзирования. Такие эффекты могут иметь наблюдаемые астрофизические следствия и использоваться для тестирования модифицированных теорий гравитации. Таким образом, исследование данной модели открывает перспективы для описания тёмной материи, тёмной энергии и структуры компактных объектов

Благодарность

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23489289).

Вклад авторов

Ержанов К.К. – разработал концепцию и дизайн исследования.

Амангельдиев А.Н. – осуществил сбор и анализ данных.

Алтайбаева А.Б. – выполнила обзор литературы.

Бауыржан Г.Б. – осуществил редактирование рукописи и обеспечил техническую поддержку исследования.

Список литературы

1. Einstein A. The foundation of the general theory of relativity, Annalen der Physik 49, p. 769–822(1916). DOI: 10.1002/andp.19163480702.

2. Lütfüoğlu B.C., Saka E.U., Shermatov A., Ibragimov I., Rayimbaev J., Muminov S. Gravitational quasinormal modes of Dymnikova black holes, arxiv, p. 1–2 (2025). DOI: arXiv:2509.24633.

3. Yerzhanov K.K., Baurzhan G., Altaybaeva A., Myrzakulov R. Inflation from the symmetry of the generalized cosmological model, Symmetry (Basel) (2021). DOI: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000554820300163.

4. Momeni D., Yerzhanov K.K., Myrzakulov R. Quantized black hole and Heun function, Canadian Journal of Physics 90, p. 877–881(2012). DOI: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000308973200006.

5. Ibrokhimov T., Turakhanov Z., Atamuratov F., Abdujabbarov A., Yerzhanov K.K., Baurzhan G., Abduvokhidov A. Testing regular scale-dependent black hole space time using particle dynamics: Shadow and gravitational weak lensing, Physics of the Dark Universe (2025). DOI: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:001398426900001.

K.K. Yerzhanov, A.N. Amangeldiyev, A.B. Altaybayeva, G.B. Baurzhan

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

(E-mail: aamangeldiev525@gmail.com)

Solution for the *F(R, X, φ)* model in the spherical metric

Abstract. This paper considers analytical and numerical approaches to constructing solutions within the framework of a generalized gravitational model of the form *F(R, X, φ).* Particular attention is paid to the study of spherical symmetry metrics, which make it possible to study the behavior of gravitational and scalar degrees of freedom in compact objects and cosmological models. It is shown that the introduction of a nonlinear dependence of the action function on the combination *F (R, X, φ)* significantly expands the class of admissible solutions compared to traditional *F(R)* – gravity. The conditions for the existence of static and dynamic solutions, their stability, and possible physical interpretations in the context of a modified theory of gravity and astrophysics are analyzed. The obtained results open up prospects for describing dark matter, dark energy, and gravitational collapses within a unified formalism. Additionally, possible manifestations of the model in scenarios of the early Universe are considered, including inflationary dynamics and phase transitions, as well as the influence of cosmological perturbations on the formation of structures and the evolution of cosmological perturbations. The role of numerical methods in studying complex regimes where analytical solutions are inaccessible is emphasized. Particular attention is given to comparative analysis with known solutions in general relativity, which allows for the identification of new physical effects and constraints on the model parameters. The presented results may be useful in developing alternative cosmological scenarios and can be further applied to the analysis of astrophysical observations, including gravitational-wave signals and the dynamics of compact stellar objects.

Key words: Schwarzschild metric, Ricci tensor, Klein–Gordon equation, radial coordinate, modified gravity

К.К. Ержанов, А.Н. Амангельдиев, А.Б. Алтайбаева, Г.Б. Бауржан
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
(E-mail: aamangeldiev525@gmail.com)

Сфералық метрикадағы *F(R, X, φ)* моделінің шешімі

Аннотация. Бұл жұмыс *F (R, X, φ)* түріндегі жалпыланған гравитациялық модельде шешімдерді құрудың аналитикалық және сандық тәсілдерін қарастырады. Сфералық симметрия метрикасын зерттеуге ерекше назар аударылады, олар ықшам нысандар мен космологиялық модельдердегі гравитациялық және скалярлық еркіндік дәрежелерінің мінез-құлқын зерттеуге мүмкіндік береді. Әрекет функциясының *F (R, X, φ)* комбинациясына сызықты емес тәуелділігін енгізу дәстүрлі *F(R)* – ауырлық күшімен салыстырғанда рұқсат етілген шешімдер класын едәуір кеңейтетіні көрсетілген. Статикалық және динамикалық шешімдердің болу шарттары, олардың тұрақтылығы және гравитация мен астрофизиканың өзгертілген теориясы контекстіндегі мүмкін физикалық интерпретациялар талданады. Алынған нәтижелер біртұтас формализм аясында қараңғы материяны, қараңғы энергияны және гравитациялық күйреуді сипаттау перспективаларын ашады. Сонымен қатар, инфляциялық динамика мен фазалық ауысуларды қоса алғанда, ерте Әлемнің сценарийлеріндегі модельдің ықтимал көріністері, сондай-ақ құрылымның қалыптасуына және космологиялық бұзылулардың эволюциясына космологиялық бұзылулардың әсері қарастырылады. Аналитикалық шешімдер қол жетімсіз күрделі режимдерді зерттеуде сандық әдістердің рөлі ерекше атап өтіледі. Модель параметрлеріне жаңа физикалық әсерлер мен шектеулерді анықтауға мүмкіндік беретін жалпы салыстырмалылықтағы белгілі шешімдермен салыстырмалы талдауға ерекше назар аударылады. Ұсынылған нәтижелер альтернативті космологиялық сценарийлерді әзірлеуде пайдалы болуы мүмкін және әрі қарай астрофизикалық бақылауларды, соның ішінде гравитациялық-толқын сигналдарын және ықшам жұлдыздық объектілердің динамикасын талдауға қолданылуы мүмкін.

Түйінді сөздір: Шварцшильд метрикасы, Риччи тензоры, Клейн – Гордон теңдеуі, радиалдық координата, өзгертілген ауырлық

References

1. Einstein A. The foundation of the general theory of relativity, Annalen der Physik 49, p. 769–822(1916). DOI: 10.1002/andp.19163480702.

2. Lütfüoğlu B.C., Saka E.U., Shermatov A., Ibragimov I., Rayimbaev J., Muminov S. Gravitational quasinormal modes of Dymnikova black holes, arxiv, p. 1–2 (2025). DOI: arXiv:2509.24633.

3. Yerzhanov K.K., Baurzhan G., Altaybaeva A., Myrzakulov R. Inflation from the symmetry of the generalized cosmological model, Symmetry (Basel) (2021). DOI: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000554820300163.

4. Momeni D., Yerzhanov K.K., Myrzakulov R. Quantized black hole and Heun function, Canadian Journal of Physics 90, p. 877–881(2012). DOI: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000308973200006.

5. Ibrokhimov T., Turakhanov Z., Atamuratov F., Abdujabbarov A., Yerzhanov K.K., Baurzhan G., Abduvokhidov A. Testing regular scale-dependent black hole space time using particle dynamics: Shadow and gravitational weak lensing, Physics of the Dark Universe (2025). DOI: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:001398426900001.

Сведения об авторах:

К.К. Ержанов **–** PhD, кафедра общей и теоретической физики Евразийского национального униыерситета имени Л.Н. Гумилева, ул. Мунайтпасова 13, Астана, 10008, Казахстан

А.Н. Амангельдиев **–** автор для корреспонденции, докторант кафедры общей и теоретической физики Евразийского национального униыерситета имени Л.Н. Гумилева, ул. Мунайтпасова 13, Астана, 10008, Казахстан

А.Б. Алтайбаева **–** PhD, кафедра общей и теоретической физики Евразийского национального униыерситета имени Л.Н. Гумилева, ул. Мунайтпасова 13, Астана, 10008, Казахстан

Г.Б. Бауржан **–** PhD, кафедра космической техники и технологий Евразийского национального униыерситета имени Л.Н. Гумилева, ул. Мунайтпасова 13, Астана, 10008, Казахстан

К.К. Ержанов **–** PhD, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің жалпы және теориялық физика кафедрасы, Мұнайтпасов көшесі, 13, Астана, 10008, Қазақстан

А.Н. Амангельдиев **–** хат-хабар авторы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, жалпы және теориялық физика кафедрасының докторанты, Мұнайтпасов көшесі, 13, Астана, 10008, Қазақстан

А.Б. Алтайбаева **–** PhD, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің жалпы және теориялық физика кафедрасы, Мұнайтпасов көшесі, 13, Астана, 10008, Қазақстан

Г.Б. Бауржан **–** PhD, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Ғарыштық техника және технологиялар кафедрасы, Мұнайтпасов көшесі, 13, Астана, 10008, Қазақстан

K.K.Yerzhanov **–** PhD, Department of general and theoretical physics of L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Munaitpasov St., Astana, 10008, Kazakhstan

A.N. Amangeldiyev **–** the corresponding author, Doctoral student of the Department of General and Theoretical Physics of L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Munaitpasov St., Astana, 10008, ***Kazakhstan***

A.B. Altaybayeva **–** PhD, Department of general and theoretical physics of L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Munaitpasov St., Astana, 10008, Kazakhstan

G.B. Baurzhan – PhD, Department of Space Engineering and Technology of L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Munaitpasov St., Astana, 10008, Kazakhstan

Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).