Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің ХАБАРШЫСЫ.
ISSN: 2616-6836. eISSN: 2663-1296

ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ СЕРИЯСЫ/ PHYSICS. ASTRONOMY SERIES / СЕРИЯ ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

МРНТИ 30.19.15 https://doi.org/10.32523/2616-6836-2025-150-1-48-59
Научная статья

Об определении инвариантов трехмерного тензора упругости в анизотропных средах

Н. Испулов[1], А. Кадир Рахимун[2], А. Кисабекова*[3], А. Жумабеков[1], Г. Алпысова[4], Л. Ельтинова[3]

[1]НАО «Торайгыров университет», Павлодар, Казахстан
[2]Шукур университет бизнес администрирования, Шукур, Пакистан
[3]НАО «Павлодарский педагогический университет имени Ә.Марғұлан», Павлодар, Казахстан
[4]Карагандинский университет имени Е.Букетова, Караганда, Казахстан

**Автор для корреспонденции: kissabekovaa@gmail.com*

Аннотация. Инварианты тензоров упругости заключают в себе важнейшие механические свойства материалов, эффективно обобщая и расширяя традиционное понятие «жесткости пружины» на значительно более сложные, многомерные системы. В отличие от простых пружин, где жесткость характеризуется одной константой, тензоры упругости позволяют описывать сложные взаимодействия в материалах с анизотропными свойствами, включая материалы с различными типами симметрии. Эти инварианты являются мощным инструментом для анализа и классификации механических свойств, так как они позволяют учитывать как линейные, так и нелинейные реакции материалов на внешние воздействия. В рамках данной статьи мы используем обобщенное представление Кельвина для параметризации тензора напряжений, что существенно упрощает и делает более наглядным процесс определения влияния различных факторов на тензор упругости. В рамках исследования мы вычисляем инварианты анизотропного тензора упругости, принимая во внимание вращательную симметрию, задаваемую группой SO(3). В результате анализа мы выявили 18 независимых инвариантов, среди которых 5 инвариантов первого порядка, особенно актуальных для изотропных материалов, и 13 инвариантов более высокого порядка. Эти результаты подчеркивают важность и сложность исследования анизотропных материалов и открывают новые перспективы для их механической интерпретации и классификации.

Ключевые слова: анизотропия, инварианты тензора, количественная симметрия, линейная упругость, представление Кельвина

Поступила 13.11.2024 После доработки 2.02.2025 Принята к печати 19.02.2025. Доступно онлайн 25.03.2025

[1] *автор для корреспонденцииг

Введение

Процесс выявления инвариантов является важным шагом в изучении механических свойств материалов, поскольку позволяет описывать их поведение с высокой степенью точности.

При анализе типов материалов, для которых характерны данные инварианты, мы сосредоточили внимание на изотропных материалах. Это решение было принято с целью продемонстрировать потенциал инвариантов в задачах классификации материалов, что показало их высокую эффективность в данной области. Изотропные материалы, благодаря своей симметрии, служат отличной моделью для начального анализа инвариантов, и выявленные результаты подтверждают значимость инвариантов для понимания их механических характеристик.

Интересным направлением для будущих исследований является разработка более глубокой механической интерпретации этих инвариантов, что позволит не только лучше понять их суть, но и завершить классификацию материалов на их основе. Более детальное изучение анизотропных материалов, а также систем с более сложными свойствами также представляет значительный научный интерес, так как это может привести к новым открытиям в области механики материалов.

В монографии [1] представлены инвариантные соотношения, которые описывают внутреннюю симметрию различных анизотропных сред. Автор доказал, что данные соотношения применимы к уравнениям упругих и электромагнитных волн в различных типах кристаллов, а также отражают общие характеристики решений уравнений движения.

Определение этих инвариантов играет ключевую роль в механике, особенно при реконструкции геометрических характеристик материала. Ряд исследователей [2;3;4;5;6;7] предложили методы для нахождения инвариантов тензора упругости в трёхмерном пространстве, однако их работы зачастую не были направлены на явное выявление всех независимых инвариантов.

В предыдущей статье [8] мы рассмотрели вращение группы SO(3), что дало возможность в настоящей работе определить восемнадцать независимых инвариантов в декартовой системе координат. Эти инварианты были подтверждены как глобальные, что подчеркивает их универсальный характер в контексте различных систем координат.

В данной работе мы ставим перед собой задачу вычисления инвариантов анизотропного тензора упругости с учетом вращательной симметрии, определяемой группой SO(3). Учет этой симметрии позволяет более точно описывать сложные механические свойства материалов, особенно тех, которые обладают анизотропной структурой. Исследование инвариантов, связанных с такими тензорами, открывает путь к более глубокому пониманию поведения материалов при воздействии различных нагрузок, что важно для прогнозирования их реакции на внешние воздействия. Это, в свою очередь, позволит лучше понять, как материалы ведут себя под напряжениями, деформациями и другими воздействиями, что может оказаться полезным для разработки новых материалов с улучшенными механическими характеристиками и повышенной устойчивостью к деформациям.

Материалы и методы

В работе [8, стр. 85] из закона Гука и представления Кельвина мы получили следующие соотношения:

$$\begin{cases} s_1' = \frac{s_1+s_2}{2} + \frac{s_1-s_2}{2}cos2\theta + \frac{s_6}{\sqrt{2}}sin2\theta \\ s_2' = \frac{s_1+s_2}{2} - \frac{s_1-s_2}{2}cos2\theta - \frac{s_6}{\sqrt{2}}sin2\theta \\ s_3' = s_3 \\ s_4' = s_4cos\theta - s_5sin\theta \\ s_5' = s_4sin\theta + s_5cos\theta \\ s_6' = \frac{-1}{\sqrt{2}}(s_1 - s_2)sin2\theta + s_6cos2\theta \end{cases} \quad (1)$$

Далее мы использовали следующие параметры в старой и преобразованной ортогональных системах координат:

$$\begin{cases} p = \frac{s_1+s_2}{\sqrt{2}}; k = \frac{s_1-s_2}{\sqrt{2}} \\ p' = \frac{s_1'+s_2'}{\sqrt{2}}; k' = \frac{s_1'-s_2'}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (2)$$

По аналогии с представлением Кельвина мы положили, что $C_{IJ}=C_{ijkl}$. Учитывая перестановки, выполненные в (1), переписали С согласно закону Гука:

$$s = Ce \quad (3)$$

где s – тензор напряжений, С – упругость, e – тензор деформаций. Из уравнения (2) мы вывели:

$$C^*=P^{-1}\,CP \quad (4)$$

где:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Получили новый тензор упругости, который мы записали C^*, где $\boldsymbol{\check{C} = C^*}$ с $\check{C}_{ij}=C_{ij}^*$. В дальнейшем будем использовать упрощенную форму тензора упругости, представленную здесь.

Эта сокращенная форма помогает нам упростить расчет, и мы получаем:

$$\check{C}' = \begin{pmatrix} R_{2\theta}^t C_1 R_{2\theta} & R_{2\theta}^t C_1 r_\theta \\ r_{2\theta}^t C_2^t R_{2\theta} & r_\theta^t C_3 r_\theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

Как можно заметить, тензор C разделяется на шесть групп согласно классификации Тинга [9]. При анализе данных он выявил, что инварианты некоторых групп включают компоненты, связанные с различными группами Ck для k=1,2,3,…,6. Примечательно, что другие исследователи использовали аналогичное разложение, предложенное Тингом, но формулировали преобразования явно, а не в матричной форме.

В статье для выявления и доказательства существования инвариантов тензора упругости использовался метод, основанный на рассмотрении вращательной симметрии группы SO(3). Применение обобщенного представления Кельвина позволило упростить параметризацию тензора напряжений и облегчить анализ инвариантов. Методика включала разложение тензора упругости на неприводимые компоненты, что дало возможность идентифицировать 18 независимых инвариантов. Для доказательства их существования были использованы методы инвариантной теории, опирающиеся на представления группы SO(3), что позволило подтвердить их глобальный характер.

В следующем разделе определим инварианты для каждого из этих преобразований по отдельности. Для каждого компонента C′ имеется шесть независимых инвариантов, что позволит более детально изучить их структуру и взаимосвязи.

Результаты и обсуждение

Инварианты C_1'

Трансформация (6) дает нам $C_1' = R^t_{2\theta} C_1 R_{2\theta}$, что можно рассматривать как миниатюру преобразования матрицы 6x6 $\check{C}'$. Затем мы оценили инварианты Č по сравнению с их той же величиной в C. Запишем:

$$C_1' = \begin{pmatrix} \check{C}_{11} & q_1 \\ q_1^t & a_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$\check{C}_{11}$ – скаляр, q_1 – вектор и a_1 – матрица 2x2.

Вычисления дают следующие инварианты:

– Коэффициент $\check{C}_{11}$

– Длина квадрата

$$q^2_1 = \check{C}^2_{12} + \check{C}^2_{13}$$

След a_1 приводит к уменьшению матрицы до C_1'

$$tr(a_1) = \check{C}_{22} + \check{C}_{33}$$

Детерминант a_1

$$det(a_1)=Č_{22}\,Č_{33} - Č^2_{23}$$

Сумма двух квадратов длины L^2_1 дает для a_1:

$$L^2_1=Č^2_{22}+Č^2_{33} + 2Č^2_{23}$$

– Детерминант C'_1

$$det(C'_1)=Č_{11}\,Č_{22}\,Č_{33} - 2Č_{12}\,Č_{13}\,Č_{23} - Č_{11}\,Č^2_{23} - Č_{22}\,Č^2_{13} - Č3_3\,Č^2_{12}.$$

Инварианты C'_3

Трансформация (6) дает нам $C'_3 = r^t_\theta\, C_3\, r_\theta$. Таким же образом мы оценили инварианты Č по сравнению с их той же величиной в C.

Запишем:

$$C_3' = \begin{pmatrix} a_3 & q_3 \\ q_3^t & Č_{66} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$Č_{66}$ – скаляр, q_3– вектор и a_3 – матрица 2x2.

Вычисления дают следующие инварианты:

– Коэффициент $Č_{66}$

– Длина квадрата

$$q^2_3=Č^2_{46} + Č^2_{56}$$

– След a_3 приводит к уменьшению матрицы до C'_3

$$tr(a_3)=Č_{44}+ Č_{55}$$

– Детерминант a_3

$$det(a_3) = Č_{44}\,Č_{55} - Č^2_{45}$$

– Сумма двух квадратов длины L^2_3 дает для a_3:

$$L^2_3= Č^2_{44} + Č^2_{55} + 2Č^2_{45}$$

– Детерминант C'_3

$$det(C'_3)=Č_{44}\,Č_{55}\,Č_{66} - 2Č_{46}\,Č_{56}\,Č_{45} - Č_{44}\,Č^2_{56} - Č_{55}\,Č^2_{46} - Č_{66}\,Č^2_{45}$$

– Инварианты C'_2

ISSN: 2616-6836. eISSN: 2663-1296

По подобию, $C^t_3 = r^t_{2\theta} C^t_2 R_{2\theta}$.
Запишем:

$$C'_2 = \begin{pmatrix} q_2^{(1)} & a_2 \\ \check{C}_{16} & q_2^{(2)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$\check{C}_{16}$ – скаляр, $q^{3(i)}$ – векторы и a_2 матрица 2x2.
Вычисления дают следующие инварианты:
– Коэффициент $\check{C}_{16}$
– Длина квадрата

$$(q_2^{(1)})^2 = \check{C}^2_{14} + \check{C}^2_{15}$$

Длина квадрата

$$(q_{22}^{(2)})^2 = \check{C}^2_{26} + \check{C}^2_{36}$$

– Детерминант a_2

$$det(a_2) = \check{C}_{24} \check{C}_{35} - \check{C}_{25} \check{C}_{34}$$

Сумма двух квадратов длины $L^2{}_2$ дает для a_2

$$L^2{}_3 = \check{C}^2_{24} + \check{C}^2_{25} + \check{C}^2_{34} + \check{C}^2_{35}$$

– Детерминант C'_1

$$det(C'_3) = \check{C}_{14} (\check{C}_{25} \check{C}_{36} - \check{C}_{26} \check{C}_{35}) + \check{C}_{15} (\check{C}_{26} \check{C}_{34} - \check{C}_{24} \check{C}_{36}) + \check{C}_{16} (\check{C}_{24} \check{C}_{35} - \check{C}_{25} \check{C}_{34})$$

Таким образом, найдены все 18 инвариантов.

Обзор инвариантов

Используя соотношение (4), мы заменяем коэффициенты $\check{C}_{ij}$ по их выражениям, что дает нам следующие инварианты:

$$I_1 = \frac{1}{2}(C_{11} + 2C_{12} + C_{22})$$
$$I_2 = \frac{1}{2}(C_{11} - 2C_{12} + C_{22}) + C_{66}$$
$$I_3 = C_{33}$$
$$I_4 = C_{44} + C_{55}$$
$$I_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_{13} + C_{23})$$

$I_1 = 2\Phi_2$, $I_3 = \Phi_1$, $I_4 = \Phi_4$, $\sqrt{2}\ I_5 = \Phi_3$ – инварианты Тинга. I_2 можно рассматривать как комбинацию двух выражений Тинга Φ_5.

$$I_{15} = C_{33}C_{44}C_{55} + 2C_{34}C_{35}C_{45} - C_{44}C_{35}^2 - C_{55}C_{34}^2 - C_{33}C_{45}^2$$
$$I_{16} = \frac{1}{2}(C_{14} - C_{24})^2 + \frac{1}{2}(C_{15} - C_{25})^2 + C_{46}^2 + C_{56}^2$$
$$I_{17} = \frac{1}{\sqrt{2}}[C_{56}(C_{14} - C_{24}) - C_{46}(C_{15} - C_{25})]$$
$$I_{18} = C_{36}(C_{15}C_{24} - C_{14}C_{25}) + C_{56}(C_{14}C_{23} - C_{13}C_{24}) + C_{46}(C_{13}C_{25} - C_{15}C_{23})$$

Стоит отметить, что инварианты можно комбинировать, чтобы получить составные инварианты. Это подтверждает существование восемнадцати инвариантов. В следующем разделе рассмотрены их формы для изотропных материалов, таких как волокнистые композиты, которые можно считать изотропными в определённых условиях.

Физический смысл: изотропный случай

Материалы изотропны, когда в тензоре упругости [10] $C_{11}=C_{22}=C_{33}$, $C_{12}=C_{13}=C_{23}$ and $C_{44}=C_{55}=C_{66}$. Остальные коэффициенты $C_{ij} = 0$.

Мы можем видеть, что $\frac{1}{2}(I_1 - I_4)$ и I_4 соответствуют коэффициентам Ламе соответственно λ и μ. Этих двух инвариантов достаточно для классификации изотропных материалов.

Это доказывает, что эти восемнадцать инвариантов можно использовать для классификации материалов, пока база 297 не станет полезной.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели вращение группы SO(3), что позволило нам выявить восемнадцать независимых инвариантов в декартовой системе координат и доказать их существование как глобальных инвариантов. Инварианты первого порядка, а также некоторые квадратичные инварианты второго порядка, были также обнаружены другими исследователями, такими как [4;5;8;11;12]. В рамках нашего исследования мы сосредоточились на изотропном случае, чтобы продемонстрировать, что эти инварианты могут быть полезны для классификации различных типов материалов, ранее в работах [13;14] были рассмотрены похожие исследования в анизотропных случаях. В дальнейшем будет интересно провести механическую интерпретацию этих инвариантов.

Выявленные инварианты представляют собой важный инструмент для анализа механических свойств материалов, но их физическая интерпретация требует дальнейших исследований. В частности, полезно будет провести анализ связи инвариантов с основными характеристиками упругих материалов, такими как жесткость, прочность и деформационные свойства. Кроме того, необходимо исследовать поведение инвариантов при различных внешних воздействиях, включая термомеханические нагрузки и электромагнитные поля, что позволит расширить их применение в инженерных и технологических задачах.

Инварианты тензоров упругости особенно важны для описания механических свойств анизотропных материалов, таких как:

Композитные материалы, например, углепластики и керамические матрицы, которые обладают направленной прочностью и жесткостью.

Геологические породы, включая сланцы и метаморфические образования, имеющие выраженную анизотропию механических свойств.

Кристаллические материалы с низкой симметрией, такие как монокристаллы кремния или сапфира, где упругие свойства различны в разных направлениях.

Биологические ткани, например, костные структуры, которые демонстрируют направленную жесткость и устойчивость к нагрузкам.

Применение инвариантов для таких материалов позволит лучше классифицировать их механические свойства и прогнозировать поведение под различными нагрузками.

Вклад авторов

Н.А. Испулов, А.Кадыр Рахимун – анализ и математические расчеты, формулировка ключевых целей и задач.

А.А. Кисабекова, А.Ж. Жумабеков – составление черновика рукописи, чтение и редактирование рукописи, утверждение окончательного варианта.

Г.К. Алпысова, Л.А. Ельтинова – чтение и редактирование рукописи с внесением ценных критических замечаний.

Список литературы

1. S.K. Tleukenov, *Matricant Method. Saarbrucken,* LAP LAMBERT Academic Publishing, – 2014. –157 p. **– журнал на англ.языке**

2. M. Olive, B. Kolev, N. Auffray, *Les invariants du tenseur d'élasticité, 22ème congrès français de Mécanique* [CFM2015], – 2015., – p.01576369 – **журнал на англ.языке**

3. K. Atchonouglo, G. de Saxcé, M. Ban, *2d elasticity tensor invariants, invariants definite positive criteria,* Advances in Mathematics: Scientific Journal, – 2021. – pp. 2999–3012 **– журнал на англ.языке**

4. M. Ahmad, *Invariants and structural invariants of the anisotropic elasticity tensor,* Q. Jl Mech. Appl. Math, – 2002. pp. 597–606 **– журнал на англ.языке**

5. A. Norris, *Quadratic invariants of elastic moduli,* Q. Jl Mech. Appl. Math, – 2007. – pp. 367–389 **– журнал на англ.языке**

6. M. Olive, *About Gordan's Algorithm for Binary Forms,* Found Comput Math, –2017. – pp. 1407–1466 **– журнал на англ.языке**

7. R. Desmorat, N. Auffray, B. Desmorat and others, *Minimal functional bases for elasticity tensor symmetry classes*, Journal of Elasticity, – 2022. – V2 – p.03241501 **– журнал на англ.языке**

8. Abdul Qadir, N.A. Ispulov, A.A. Kissabekova, R.M. Karimova, A. Zh. Zhumabekov, *About the three-dimensional elasticity tensor in anisotropic media,* Bulletin of Toraighyrov University Physics, Mathematics & Computer Science series, – №3 – 2024. – pp. 81-95 **– журнал на англ.языке**

9. T. Ting, *Invariants of anisotropic elastic constants,* The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, – 1987. – pp. 431–448 **– журнал на англ.языке**

10. S. Forte, M. Vianello, *Symmetry classes for elasticity tensors,* Journal of Elasticity, – 1996. – p. 81–108 **– журнал на англ.языке**

11. W. Thomson, B. Kelvin, *Mathematical and Physical Papers,* Elasticity, Heat, Electro-Magnetism (Paperback), – 2006. – pp. 548 **– журнал на англ.языке**

12. W. Thomson, *Elements of a Mathematical Theory of Elasticity,* Philosophical Transactions, – 1856. – pp. 481-498 **– журнал на англ.языке**

13. A.A. Kurmanov, N.A. Ispulov, Abdul Qadir and others, *Propagation Of Electromagnetic Waves In Stationary Anisotropic Media,* Physica Scripta, 96, Number of article: 085505, DOI: 10.1088/1402-4896/abfe87 – 2021 **– журнал на англ.языке**

14. N.A. Ispulov, M.R. Akhmetsafin, *On non-classical boundary conditions of non-rigid contact during the propagation of thermoelastic waves in anisotropic medium of tetragonal syngony. Doi.org/ 10.48081/XEYZ6093,* Bulletin of Toraighyrov University Physics, Mathematics & Computer Science series – №1 – 2023. – pp. 81-91 **– журнал на англ.языке**

Н. Испулов[1], А. Кадир Рахимун[2], А. Кисабекова*[3], А. Жумабеков[1], Г. Алпысова[4], Л. Ельтинова[3]

[1]«Торайгыров университет» КеАҚ, Павлодар, Қазақстан

[2]Шукур бизнес әкімшілік университеті, Шукур, Пәкістан

[3]«Ә.Марғұлан атындағы Павлодар педагогикалық университеті» КеАҚ, Павлодар, Қазақстан

[4]Е.Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан

**Хат алмасуға арналған автор: kissabekovaa@gmail.com*

Анизотроптық орталардағы үш өлшемді серпімділік тензорының инварианттарын анықтау туралы

Аңдатпа. Серпімділік тензорларының инварианттары материалдардың ең маңызды механикалық қасиеттерін инкапсуляциялайды, «серіппелі қаттылық» дәстүрлі тұжырымдамасын әлдеқайда күрделі, көп өлшемді жүйелерге тиімді түрде жалпылайды және кеңейтеді. Қатаңдығы бір константамен сипатталатын қарапайым серіппелерден айырмашылығы, серпімділік тензорлары анизотропты қасиеттері бар материалдардағы, соның ішінде симметрияның әртүрлі типтері бар материалдардағы күрделі әрекеттесулерді сипаттауға мүмкіндік береді. Бұл инварианттар механикалық қасиеттерді талдау және жіктеу үшін қуатты құрал болып табылады, өйткені олар материалдардың сыртқы әсерлерге сызықтық және сызықтық емес реакцияларын есепке алуға мүмкіндік береді. Бұл мақалада кернеу тензорын параметрлеу үшін жалпылама Кельвин көрінісін қолданамыз, ол икемділік тензорына әртүрлі факторлардың әсерін анықтау процесін айтарлықтай жеңілдетеді және көрнекі етеді. Зерттеу барысында SO(3)

тобымен берілген айналу симметриясын ескере отырып, анизотропты серпімділік тензорының инварианттарын есептейміз. Талдау нәтижесінде біз 18 тәуелсіз инвариантты анықтадық, оның ішінде 5 бірінші ретті инвариант, әсіресе изотропты материалдарға қатысты және 13 жоғары ретті инвариант. Бұл нәтижелер анизотропты материалдарды зерттеудің маңыздылығы мен күрделілігін көрсетеді және олардың механикалық интерпретациясы мен классификациясының жаңа перспективаларын ашады.
Түйін сөздер: анизотропия, тензор инварианттары, сандық симметрия, сызықтық икемділік, Кельвин көрінісі.

N. Ispulov[1], A. Qadir Rahimoon[2], A. Kissabekova[3]*, A. Zhumabekov[1], G. Alpyssova[4], L. Yeltinova[3]

[1]NJSC «Toraighyrov University», Pavlodar, Kazakhstan
[2]Sukkur IBA University, Sukkur, Pakistan
[3]NJSC «Margulan University», Pavlodar, Kazakhstan
[4]Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan
**Correspondence: kissabekovaa@gmail.com*

On determining invariants of a three-dimensional elasticity tensor in anisotropic media

Abstract. Invariants of elasticity tensors embody the most important mechanical properties of materials, effectively generalizing and extending the traditional concept of "spring stiffness" to much more complex, multidimensional systems. Unlike simple springs, where the stiffness is characterized by a single constant, elasticity tensors allow us to describe complex interactions in materials with anisotropic properties, including materials with different types of symmetry. These invariants are a powerful tool for analyzing and classifying mechanical properties, since they allow us to consider both linear and nonlinear responses of materials to external influences. In this paper, we use the generalized Kelvin representation to parameterize the stress tensor, which significantly simplifies and makes more visual the process of determining the influence of various factors on the elasticity tensor. In this study, we calculate the invariants of the anisotropic elasticity tensor, taking into account the rotational symmetry defined by the SO(3) group. As a result of the analysis, we identified 18 independent invariants, including 5 first-order invariants, especially relevant for isotropic materials, and 13 higher-order invariants. These results highlight the importance and complexity of studying anisotropic materials and open up new perspectives for their mechanical interpretation and classification.

Keywords: anisotropy, tensor invariants, quantitative symmetry, linear elasticity, Kelvin representation.

References

1. S.K. Tleukenov, *Matricant Method. Saarbrucken,* LAP LAMBERT Academic Publishing, – 2014. –157 p.

2. M. Olive, B. Kolev, N. Auffray, *Les invariants du tenseur d'élasticité, 22ème congrès français de Mécanique* [CFM2015], – 2015., – p.01576369

3. K. Atchonouglo, G. de Saxcé, M. Ban, *2d elasticity tensor invariants, invariants definite positive criteria,* Advances in Mathematics: Scientific Journal, – 2021. – pp. 2999–3012

4. M. Ahmad, *Invariants and structural invariants of the anisotropic elasticity tensor,* Q. Jl Mech. Appl. Math, – 2002. pp. 597–606

5. A. Norris, *Quadratic invariants of elastic moduli,* Q. Jl Mech. Appl. Math, – 2007. – pp. 367–389

6. M. Olive, *About Gordan's Algorithm for Binary Forms,* Found Comput Math, –2017. – pp. 1407–1466

7. R. Desmorat, N. Auffray, B. Desmorat and others, *Minimal functional bases for elasticity tensor symmetry classes*, Journal of Elasticity, – 2022. – V2 – p.03241501

8. Abdul Qadir, N.A. Ispulov, A.A. Kissabekova, R.M. Karimova, A. Zh. Zhumabekov, *About the three-dimensional elasticity tensor in anisotropic media,* Bulletin of Toraighyrov University Physics, Mathematics & Computer Science series, – №3 – 2024. – pp. 81-95

9. T. Ting, *Invariants of anisotropic elastic constants,* The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, – 1987. – pp. 431–448

10. S. Forte, M. Vianello, *Symmetry classes for elasticity tensors,* Journal of Elasticity, – 1996. – p. 81–108

11. W. Thomson, B. Kelvin, *Mathematical and Physical Papers,* Elasticity, Heat, Electro-Magnetism (Paperback), – 2006. – pp. 548

12. W. Thomson, *Elements of a Mathematical Theory of Elasticity,* Philosophical Transactions, – 1856. – pp. 481-498

13. A.A. Kurmanov, N.A. Ispulov, Abdul Qadir and others, *Propagation Of Electromagnetic Waves In Stationary Anisotropic Media,* Physica Scripta, 96, Number of article: 085505, DOI: 10.1088/1402-4896/abfe87 – 2021

14. N.A. Ispulov, M.R. Akhmetsafin, *On non-classical boundary conditions of non-rigid contact during the propagation of thermoelastic waves in anisotropic medium of tetragonal syngony. Doi.org/ 10.48081/XEYZ6093,* Bulletin of Toraighyrov University Physics, Mathematics & Computer Science series – №1 – 2023. – pp. 81-91

Сведения об авторах:

Н. Испулов **–** кандидат физико-математических наук, доцент, НАО «Торайгыров университет», факультет «Computer Science», ул.Ломова 64, 140000, Павлодар, Казахстан

А. Кадир Рахимун **–** PhD, профессор, Шукур университет бизнес администрирования, Шукур 65200, Пакистан

А. Кисабекова **–** автор для корреспонденции, PhD, ассоциированный профессор НАО «Павлодарский педагогический университет имени Ә.Марғұлан», ул. Олжабай батыра, 60, 140000, Павлодар, Казахстан

А. Жумабеков **–** PhD, ассоциированный профессор (доцент), НАО «Торайгыров университет», Факультет Computer Science, ул.Ломова 64, 140000, Павлодар, Казахстан

Г. Алпысова **–** PhD, ассоциированный профессор, зав. кафедрой радиофизики и электроники, Карагандинский университет имени Е.А. Букетова, ул. Университетская 28, 100028, Караганда, Казахстан

Л. Ельтинова **–** PhD, доцент НАО «Павлодарский педагогический университет имени Ә.Марғұлан», ул. Олжабай батыра, 60, 140000, Павлодар, Казахстан.

Н. Испулов **–** физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, «Торайғыров университеті» КЕАҚ, «Computer Science» факультеті, Ломов көш., 64, 140000, Павлодар, Қазақстан

А. Кадир Рахимун **–** PhD, профессор, Шукур бизнес әкімшілік университеті, Шукур 65200, Пәкістан

А. Кисабекова **–** хат-хабар авторы, PhD, «Ә.Марғұлан атындағы Павлодар педагогикалық университеті» КеАҚ-ның қауымдастырылған профессор, Олжабай батыр көш., 60, 140000, Павлодар, Қазақстан

А. Жумабеков **–** PhD, қауымдастырылған профессор (доцент), «Торайғыров университеті» КЕАҚ, Computer Science факультеті, Ломов көш., 64, 140000, Павлодар, Қазақстан

Г.Алпысова **–** PhD, қауымдастырылған профессор, радиофизика және электроника кафедрасының меңгерушісі, Е.Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Университетская көш., 28, 100028, Қарағанды, Қазақстан

Л. Ельтинова **–** PhD, «Ә.Марғұлан атындағы Павлодар педагогикалық университеті» КеАҚ-ның доценті, Олжабай батыр көш., 60, 140000, Павлодар, Қазақстан.

N. Ispulov **–** Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, NJSC «Toraighyrov University», Faculty of Computer Science, Lomov Street, 64, 140000, Pavlodar, Kazakhstan

A. Qadir Rahimoon - PhD, professor, Sukkur IBA University, Sukkur 65200, Pakistan

A. Kissabekova **–** corresponding author, PhD, Associate Professor, NJSC «Margulan University», Olzhabai Batyr Street, 60, 140000, Pavlodar, Kazakhstan

A. Zhumabekov **–** PhD, Associate Professor, NCJSC «Toraighyrov University», Faculty of Computer Science, Lomov Street, 64, 140000, Pavlodar, Kazakhstan

G. Alpyssova **–** PhD, Associate Professor, Head Department of Radiophysics and Electronics, Karaganda Buketov University, Universitetskaya Street 28, 100028, Karaganda, Kazakhstan

L. Yeltinova **–** PhD, Associate Professor, NJSC «Margulan University», Olzhabai Batyr Street, 60, 140000, Pavlodar, Kazakhstan.

Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).