

Адекватность динамической модели деления возбуждённых атомных ядер

Аннотация. В работе представлена модель деления возбужденных атомных ядер. Основой модели является стохастическое дифференциальное уравнение Ланжевена. Амплитуда ланжевенского источника характеризуется белым шумом. Адекватность моделирования тестируется двумя способами: сравнением аналитического решения уравнения Ланжевена с численным в режиме гармонического осциллятора и сравнением результатов численного моделирования с результатами, полученными другими авторами. Показано, что в обоих случаях результаты динамического моделирования обеспечивают достаточную точность.

Ключевые слова: атомное ядро, уравнения Ланжевена, методом Эйлера, уравнению Фоккера-Планка, деления ядра.

DOI: doi.org/10.32523/2616-6836-2022-141-4-13-28

Введение

Впервые динамическое моделирование процесса деления удалось реализовать в 1986 году Я. Абе с сотрудниками [1]. Адекватность построенной ими модели была доказана посредством сравнения результата численного моделирования с известным аналитическим решением [2,3]. Для описания динамики деления использовались стохастические уравнения Ланжевена (УЛ), которые с физической точки зрения эквивалентны уравнению Фоккера-Планка. Численное решение УЛ осуществлялось методом Эйлера [4]. Путём численного решения УЛ была построена временная зависимость скорости деления. Оказалось, что эта скорость на начальной стадии нелинейно возрастала от нуля до квазистационарного значения. Более того, динамическая квазистационарная скорость деления (КССД) неплохо согласовалась с аналитической крамерсовой скоростью деления [5]. Таким образом, построенная динамическая модель хорошо отражала диссипативную динамику деления ядра. Подобные модели распространены для случая одной [6-21], двух [22-26] и трёх [27-31] степеней свободы. В настоящей работе проводятся более весомые аргументы в пользу адекватности динамического моделирования.

Описание динамической модели

Мы моделируем процесс деления ядра, как блуждание воображаемой броуновской частицы БЧ в пространстве коллективных переменных p и q . В роли коллективной координаты q выступает расстояние между центрами масс будущих осколков, выраженное в единицах диаметра D_0 сферического ядра. В начальный момент времени $t_0 = 0$ все ядра находятся в одной точке фазового пространства: $q_0 = q_{qs} = 0.375$, $p_0 = 0$. Такие начальные условия соответствуют экспериментальной ситуации, описанной в работе [32]. Движение БЧ описывается полными уравнениями Ланжевена.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V'(q) & -\beta \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_c(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Случайная сила $\psi_C(t)$ имеет свойства

$$\begin{aligned}\langle \psi_C(t) \rangle &= 0 \\ \langle \psi_C(t) \psi_C(t') \rangle &= 2D_p \delta(t-t')\end{aligned}\quad (2)$$

где $\delta(t-t')$ – дельта-функция Дирака. В случае $\beta \gg \omega_{sd}$ движение БЧ носит характер аperiodического затухания. При этом импульс p релаксирует быстро (за время $\tau_p = \beta^{-1}$), тогда как для релаксации координаты q требуется больше времени ($\tau_q = \beta \omega_{sd}^{-2}$). В таком режиме движение БЧ удобно описывать с помощью редуцированного уравнения Ланжевена

$$\frac{dq}{dt} = -\eta^{-1} V'(q) + \psi_o(t), \quad (3)$$

где $\psi_o(t)$ имеет тот же физический смысл, что и $\psi_C(t)$, и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\langle \psi_o(t) \rangle &= 0 \\ \langle \psi_o(t) \psi_o(t') \rangle &= 2D_q \delta(t-t')\end{aligned}\quad (4)$$

Полные и редуцированные уравнения Ланжевена (1) и (3) в разностной форме можно представить соответственно как

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= p_n - [V'(q_n) + p_n \beta] \tau + w(t_n) \sqrt{D_p \tau}, \\ q_{n+1} &= q_n + p_n m^{-1} \tau\end{aligned}\quad (5)$$

и

$$q_{n+1} = q_n - \eta^{-1} V'(q_n) \tau + w(t_n) \sqrt{D_q \tau}, \quad (6)$$

где τ – шаг моделирования, $w(t_n)$ – распределённое по Гауссу случайное число, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}\langle w(t_n) \rangle &= 0 \\ \langle w(t_n) w(t_m) \rangle &= 2\delta_{nm}\end{aligned}\quad (7)$$

где δ_{nm} – дельта Кронекера.

Две типичные траектории БЧ, полученные с помощью компьютерного моделирования, изображены на рисунке 1.

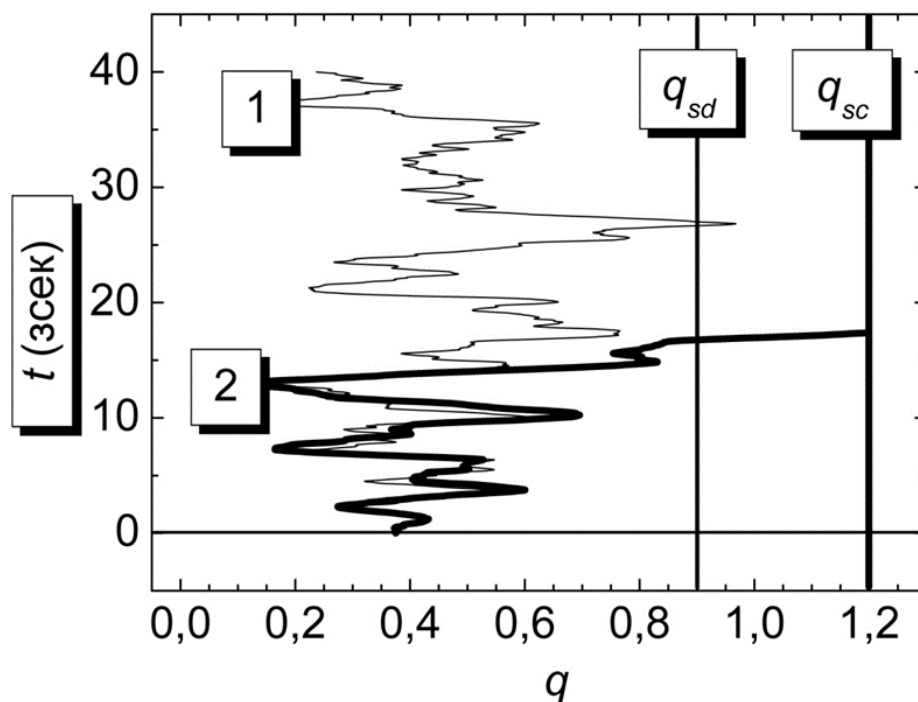


Рисунок 1. Типичные траектории движения БЧ: 1 – траектория не пересекла точку разрыва $q_{sc} = 1.2$, следовательно, ядро не поделилось. 2 – траектория пересекла q_{sc} , что привело к делению. Расчёты выполнены при $B_f = 6$ МэВ, 1) $T = 9.5$ МэВ, $\beta = 4$ зсек⁻¹; 2) $T = 10.5$ МэВ, $\beta = 1$ зсек⁻¹. Вертикальными линиями показаны координаты седловой точки q_{sd} (тонкая линия) и точки разрыва (толстая линия) q_{sc}

Траектории типа 1 отвечают равновесным флуктуациям вблизи квазистационарного состояния. Однако иногда за счет последовательности однонаправленных флуктуаций возникают траектории типа 2, которые приводят к делению. Моделирование каждой траектории длится либо фиксированное время t_D , либо до момента деления t_f , когда траектория пересекает точку разрыва q_{sc} . Точки q_{qs} , q_{sd} , q_{sc} будем называть ключевыми точками потенциала (КЧ).

Одной из основных количественных характеристик делительного процесса является скорость деления (СД). С точки зрения ланжевеновского формализма её можно выразить соотношением

$$R_{fD}(t) = [N_{tot} - N_{fD}(t)]^{-1} \frac{dN_{fD}(t)}{dt}, \tag{8}$$

где N_{tot} – полное число траекторий, участвующих в моделировании, $N_{fD}(t)$ – число траекторий, достигших точки разрыва к моменту времени t . Соотношение (8) можно переписать в виде удобном для моделирования как

$$R_{fDi} = N_{fDi} \left[\Delta t_b \cdot \left(N_{tot} - \sum_{j=0}^i N_{fDj} \right) \right]^{-1}, \tag{9}$$

где Δt_b – ширина временного бина, N_{fDi} – число траекторий, поделившихся в течение i -го бина. Типичная временная зависимость скорости деления $R_{fD}(t)$, полученная путём численного моделирования, изображена на рисунке 2.

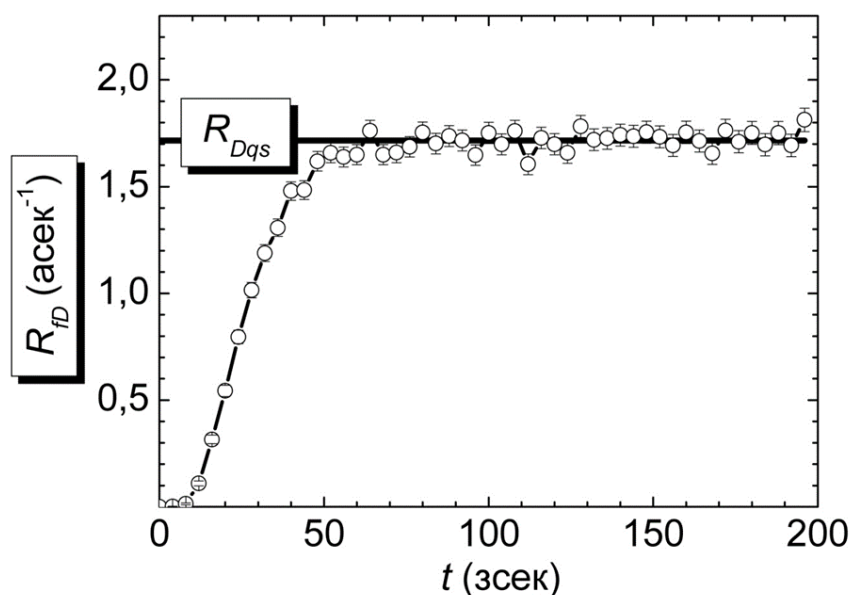


Рисунок 2. Временная зависимость скорости деления $R_{fd}(t)$ (тонкая линия с открытыми круглыми символами). Динамическая квазистационарная скорость деления R_{Dqs} показана толстой линией. Моделирование выполнено при $B_f = 6$ МэВ, $q_{qs} = 0.375$, $q_{sd} = 0.9$, $q_{sc} = 1.2$, $m = 100$ МэВ·зсек², $T = 3$ МэВ, $\beta = 15$ зсек⁻¹, $N_{tot} = 2 \cdot 10^5$, $\tau = 0.5$ зсек, $\Delta t_b = 4$ зсек.

На рисунке 2 отчётливо видна релаксация временной зависимости скорости деления к квазистационарному значению R_{Dqs} . Выход $R_{fd}(t)$ на плато является одним из аргументов в пользу того, что построенная нами динамическая модель адекватна.

Входными параметрами модели являются: начальные значения обобщённых импульса p_0 и координаты q_0 , A – массовое число делящегося ядра, a – параметр плотности одночастичных уровней энергии ядра, B_f – высота барьера деления, Δt_b – ширина временного бина, E_{tot}^* – полная энергия возбуждения ядра, m – инерционный параметр, N_{tot} – полное число ядер, участвующих в моделировании, q_{qs} – координата квазистационарного состояния, q_{sd} – координата седловой точки, q_{sc} – координата точки разрыва, T – температура ядра, t_D – время динамического моделирования, Z – зарядовое число делящегося ядра, β – коэффициент затухания.

В модели предусмотрены следующие опции: использование полных или редуцированных уравнений Ланжевена, использование канонического или микроканонического ансамбля, возможность проводить моделирование с шестью различными потенциалами, расчёт крамерсовской скорости деления [5] в широком диапазоне коэффициента затухания.

Адекватность динамической модели

Гармонический осциллятор. Первый способ оценки адекватности по-строенной модели, основан на аналитическом решении уравнений Ланжевена для гармонического осциллятора (АРГО). Аналитический метод решения этих уравнений подробно представлен в работах [2,3]. В связи с этим мы не будем заново излагать ход аналитического решения УЛ, а остановимся только на интересующих нас результатах.

Поместим ансамбль броуновских частиц в потенциал, имеющий вид

$$V^{HO}(q) = m(\omega_{HO}q)^2 / 2. \quad (10)$$

где ω_{HO} – абсолютное значение «частоты» гармонического осциллятора. В таком потенциале БЧ в результате действия на них ланжевеновского источника будут двигаться случайным образом. Плотность вероятности в этом случае запишется в виде двумерного распределения Гаусса

$$\rho(\Delta p, \Delta q, t) = \left[2\pi\sigma_p\sigma_q\sqrt{1-\varphi^2} \right]^{-1} \times \exp \left[-\left\{ 2(1-\varphi^2) \right\}^{-1} \left(\frac{\Delta p^2}{\sigma_p^2} + \frac{\Delta q^2}{\sigma_q^2} - \frac{2\varphi\Delta p\Delta q}{\sigma_p\sigma_q} \right) \right], \quad (11)$$

где $\Delta p = p - \langle p \rangle$, $\Delta q = q - \langle q \rangle$, σ_p^2 и σ_q^2 – соответствующие дисперсии импульса и координаты БЧ, φ – коэффициент корреляции этих величин.

Точное аналитическое решение уравнений Ланжевена позволяет найти выражения для средних значений p и q

$$\langle p \rangle = m \exp(-\beta t / 2) \times \left[v_0 \left(\cos \tilde{\omega}_{HO} t - 0.5\beta \tilde{\omega}_{HO}^{-1} \sin \tilde{\omega}_{HO} t \right) - q_0 \omega_{HO}^2 \tilde{\omega}_{HO}^{-1} \sin \tilde{\omega}_{HO} t \right], \quad (12)$$

$$\langle q \rangle = \exp(-\beta t / 2) \times \left[q_0 \tilde{\omega}_{HO}^{-1} \left(\beta \sin \tilde{\omega}_{HO} t + 2\tilde{\omega}_{HO} \cos \tilde{\omega}_{HO} t \right) / 2 + v_0 \tilde{\omega}_{HO}^{-1} \sin \tilde{\omega}_{HO} t \right], \quad (13)$$

где $\tilde{\omega}_{HO} = (\omega_{HO}^2 - \beta^2 / 4)^{1/2}$.

Дисперсии величин p и q имеют вид

$$\sigma_p^2 = \frac{D_p}{2\tilde{\omega}_{HO}^2} \left[\exp(-\beta t) \left(\frac{\beta}{2} \cos 2\tilde{\omega}_{HO}^2 t + \tilde{\omega}_{HO} \sin 2\tilde{\omega}_{HO}^2 t - \frac{2\omega_{HO}^2}{\beta} \right) + \frac{2\tilde{\omega}_{HO}^2}{\beta} \right], \quad (14)$$

$$\sigma_q^2 = \frac{T\beta}{2m\tilde{\omega}_{HO}^2} \left[\exp(-\beta t) \left(\frac{\beta}{2\omega_{HO}^2} \cos 2\tilde{\omega}_{HO} t - \frac{\tilde{\omega}_{HO}}{\omega_{HO}^2} \sin 2\tilde{\omega}_{HO} t - \frac{2}{\beta} \right) + \frac{2\tilde{\omega}_{HO}^2}{\beta\omega_{HO}^2} \right], \quad (15)$$

Коэффициент корреляции p и q запишется как

$$\varphi = \left[\sigma_p\sigma_q \right]^{-1} \text{cov}_A(p, q), \quad (16)$$

где

$$\text{cov}_A(p, q) = T\beta \left[\tilde{\omega}_{HO}^{-1} \sin \tilde{\omega}_{HO} t \right]^2 \exp(-\beta t). \quad (17)$$

Итак, мы имеем выражения, описывающие временную эволюцию величин $\langle p \rangle$, $\langle q \rangle$, σ_p^2 , σ_q^2 и φ . С другой стороны, значения этих же величин во времени можно получить, выполняя численное моделирование. Если модель построена корректно, то следует ожидать согласие АРГО и результатов численного моделирования (РЧМ).

Выполним моделирование, выбирая следующие параметры: $m = 100$ МэВ·зсек², $\omega_{HO} = 2$

зсек⁻¹, $\beta = 2$ зсек⁻¹, $T = 1.5$ МэВ, $N_{tot} = 10^4$, $\tau = 7$ асек⁻¹. Начальные условия определим, как $p(0) = 0$, $q(0) = 0$, $\sigma_{p(0)}^2 = 0$, $\sigma_{q(0)}^2 = 0$. Сравнение АРГО и РЧМ представлено на рисунках 3, 4.

На рисунках 3 (а, б, в, г) и 4 (а) сплошной линией показано АРГО. Видно, что значения для пяти наблюдаемых ($\langle p \rangle$, $\langle q \rangle$, σ_p^2 , σ_q^2 , φ^2), полученные в результате численного моделирования, в пределах статистических погрешностей не отличаются от АРГО.

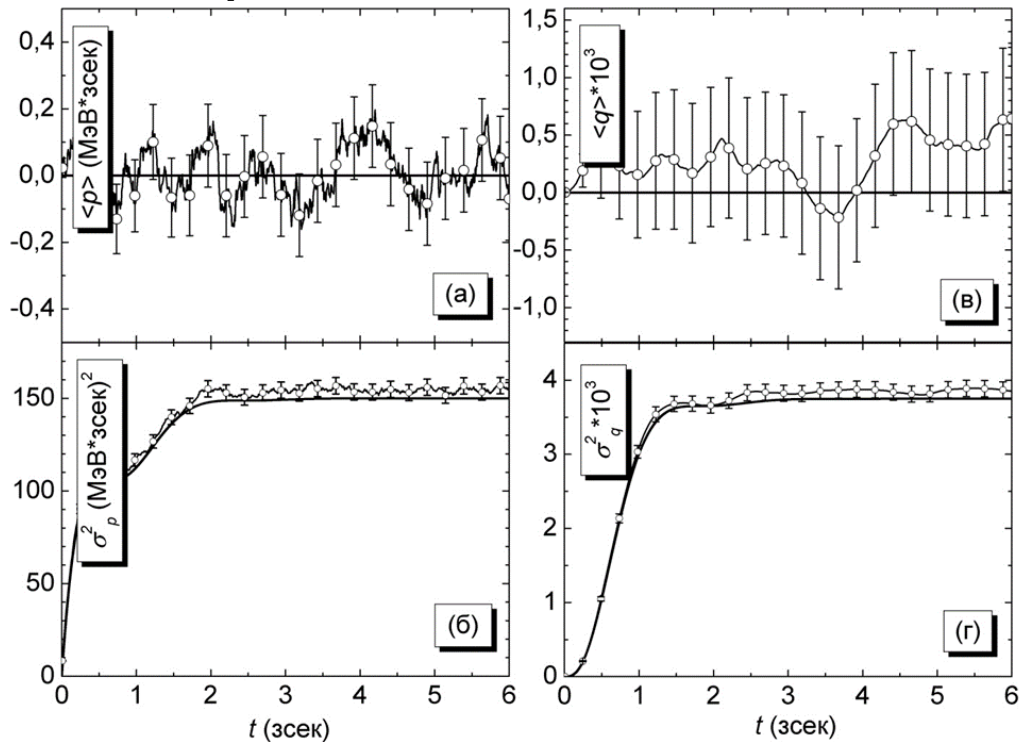


Рисунок 3. Анализ адекватности модели. (а) Среднее значение импульса $\langle p \rangle$, (б) его дисперсия σ_p^2 . (в) Среднее значение координаты $\langle q \rangle$, (г) её дисперсия σ_q^2 . АРГО (сплошная линия, РЧМ (круглые символы)

На рисунке 4 (б) показаны временные эволюции средних значений энергий БЧ: кинетической $\langle U_{Ax} \rangle = \langle p^2 \rangle / 2m$ и потенциальной $\langle V_{Ax} \rangle = m\omega_{HO}^2 \langle q^2 \rangle / 2$.

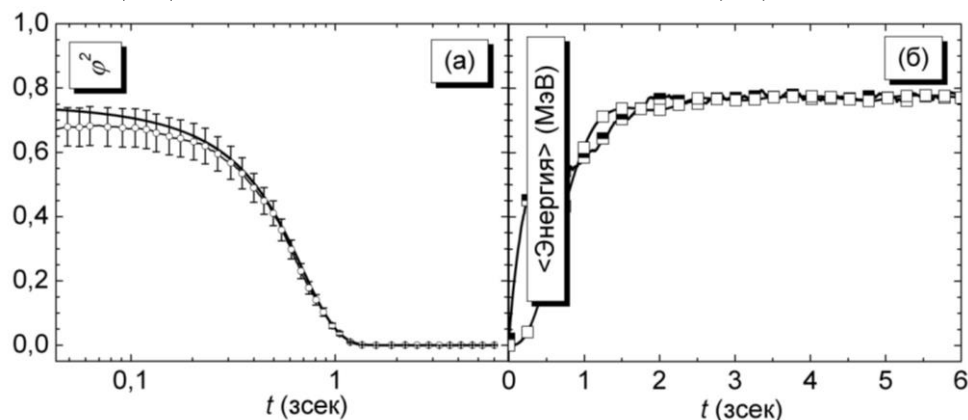


Рисунок 4. Анализ адекватности модели. (а) Квадрат коэффициента корреляции φ^2 :

АРГО (сплошная линия), РЧМ (круглые символы). (б) Средние значения кинетической $\langle U_{Ax} \rangle$ (полузакрытые символы) и потенциальной $\langle V_{Ax} \rangle$ (открытые символы) энергий БЧ. Статистические погрешности на панели (б) не выходят за границы символов

Спустя некоторое время релаксации $\tau_{UV} \geq 2$ зсек эти средние значения энергий становятся равны между собой, что соответствует теореме о вириале [33].

Более того, на рисунке 4 (б) наблюдается соответствие теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы: в состоянии равновесия средняя кинетическая энергия теплового движения, приходящаяся на каждую степень свободы (в простейшем случае – на каждую из декартовых координат), равна $T/2$. В нашем случае $T/2 = 0.75$ МэВ и $\langle U_{Ax} \rangle = \langle V_{Ax} \rangle \approx 0.75$ МэВ.

Сравнение с предшественниками. Второй способ оценки адекватности построенной ДМ заключается в сравнении с результатами работы [34]. Авторы этой работы (предшественники) решали задачу идентичную нашей: выход БЧ из потенциальной ямы. Динамика движения БЧ описывалась с помощью уравнения Смолуховского (УС)

$$\frac{\partial \rho(q,t)}{\partial t} = \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial q} \left[\rho(q,t) \frac{dV}{dq} \right] + D_q \frac{\partial^2 \rho(q,t)}{\partial q^2}. \quad (18)$$

В качестве потенциала V использовался бистабильный потенциал Бринкмана (BP) [35-43], который выражается соотношением

$$V^{BP}(q) = B_f (q^2 - 1)^2. \quad (19)$$

Деформационная зависимость BP изображена на рисунке 5.

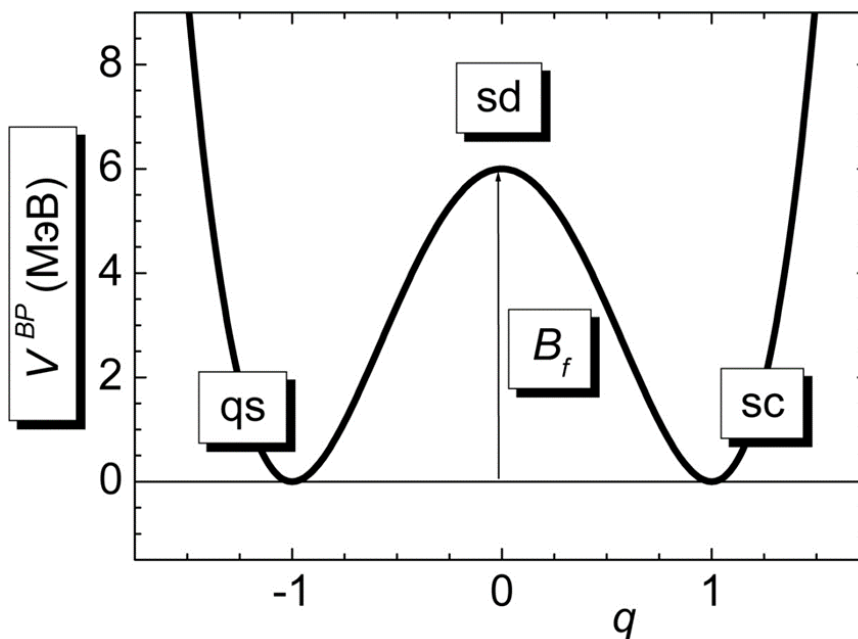


Рисунок 5. Деформационная зависимость BP

Поток вероятности частиц через барьер B_f выражался, как

$$J(q,t) = \eta^{-1} \rho(q,t) \frac{dV}{dq} - D_q \frac{\partial \rho(q,t)}{\partial q} \quad (20)$$

Начальные условия соответствовали $\rho(q,0|q_{qs}) = \delta(q - q_{qs})$.

Для нахождения решения $\rho(q,t|q_0)$ авторы [29] воспользовались методом, описанным в [32]. Согласно этому методу, необходимо выполнить замену

$$\rho(q,t) = \Psi(q) \exp[-\tilde{\lambda}t - V/2T]. \quad (21)$$

где $\Psi(q)$ – волновая функция. Тогда

$$\frac{\partial \rho(q,t)}{\partial t} = -\tilde{\lambda} \Psi(q) \exp\left[-\tilde{\lambda}t - \frac{V}{2T}\right]. \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \rho(q,t)}{\partial q^2} = -\frac{\exp[-\tilde{\lambda}t - V/2T]}{2T} \left\{ -\frac{(V')^2}{2T} + V'' + 2V' \frac{d}{dq} + \frac{d^2}{dq^2} \right\} \Psi(q). \quad (23)$$

Подставляя (22), (23) в (18), имеем

$$\frac{d^2}{dq^2} \Psi(q) + \left[\frac{V''}{2T} - \frac{(V')^2}{4T^2} + \frac{\tilde{\lambda}\eta}{T} \right] \Psi(q) = 0. \quad (24)$$

Это уравнение представляет собой уравнение для $\Psi(q)$, с собственными значениями $\tilde{\lambda}_n$ и собственными функциями $\Psi_n(q)$. При $\tilde{\lambda}_0 = 0$, $\Psi_0(q) = \exp[-V(q)/2T]$ и $\tilde{\lambda}_n > 0$ при $n > 0$. Собственные функции нормализованы как

$$\int \Psi_n(q) \Psi_m(q) dq = \delta_{nm}. \quad (25)$$

Тогда условие нормировки для $\rho_n(q) = \exp[-V(q)/2T] \Psi_n(q)$ запишется

$$\int \rho_n(q) \rho_m(q) \exp[V(q)/T] dq = \delta_{nm}. \quad (26)$$

Плотность вероятности $\rho(q,t|q_0)$ можно представить в виде

$$\rho(q,t|q_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \rho_n(q) \exp(-\tilde{\lambda}_n t). \quad (27)$$

Коэффициент Ω_n определяется из начальных условий, как

$$\Omega_n = \rho_n(q_0) \exp[V(q_0)/T]. \quad (28)$$

В разложении суммы в (27) авторы [82] решили ограничиться двумя слагаемыми. Аргументация такого ограничения заключалась в том, что при $T^{-1}B_f \geq 6$ имеем $\tilde{\lambda}_1 < 3 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, остальные слагаемые в (27) практически не будут вносить вклад в $\rho(q,t|q_0)$. Поэтому решение (18) представлялось в виде

$$\rho(q,t) = \rho_0(q) + \rho_0^{-1}(q_0) \rho_1(q) \rho_1(q_0) \exp(-\tilde{\lambda}_1 t). \quad (29)$$

Таким образом, исходя из уравнения непрерывности, поток вероятности

$$J(0,t) = -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 \rho(q,t) dq \text{ запишется, как}$$

$$J(0,t) = \tilde{\lambda}_1 \exp(-\tilde{\lambda}_1 t) \rho_1(q_0) \rho_0^{-1}(q_0) \int_{-\infty}^0 \rho_1(q) dq. \quad (30)$$

Для оценки интеграла в выражении (30) были выполнены некие приближения, которые нас мало интересуют. В результате этих приближений, квазистационарный поток вероятности через барьер

$$J_{qs} = \tilde{\lambda}_1 \cdot \Theta, \quad (31)$$

где $\Theta \approx 0.5$.

Значение для J_{qs} получено в результате аналитического решения УС. Это уравнение с физической точки зрения эквивалентно РУЛ, которое мы использовали при моделировании. В результате моделирования нами была получена квазистационарная скорость деления R_{Dqs} , которая является аналогом J_{qs} . Также были получены R_I, R_O соответствующие J_I, J_O . Таким образом, мы можем сравнить наши результаты, полученные с помощью численного моделирования, с результатами [29], полученными с помощью аналитического решения УС. Совпадение наших результатов с результатами предшественников, при одинаковых входных параметрах, послужит дополнительным аргументом в пользу адекватности нашей модели.

Сравнение результатов представлено на рисунке 6. Закрытыми символами показаны результаты предшественников, а открытыми – наши результаты. Следует отметить, что на панели (а) представлены отношения скоростей либо потоков, а именно: $J_{qs} / J_I, R_{Dqs} / R_I$ соответственно закрытые и открытые треугольники; $J_{qs} / J_O, R_{Dqs} / R_O$ – открытые и закрытые круглые символы. На панели (б) показана, относительная разница χ , которая определяется, как $R_O / R_I - 1$ либо $J_O / J_I - 1$.

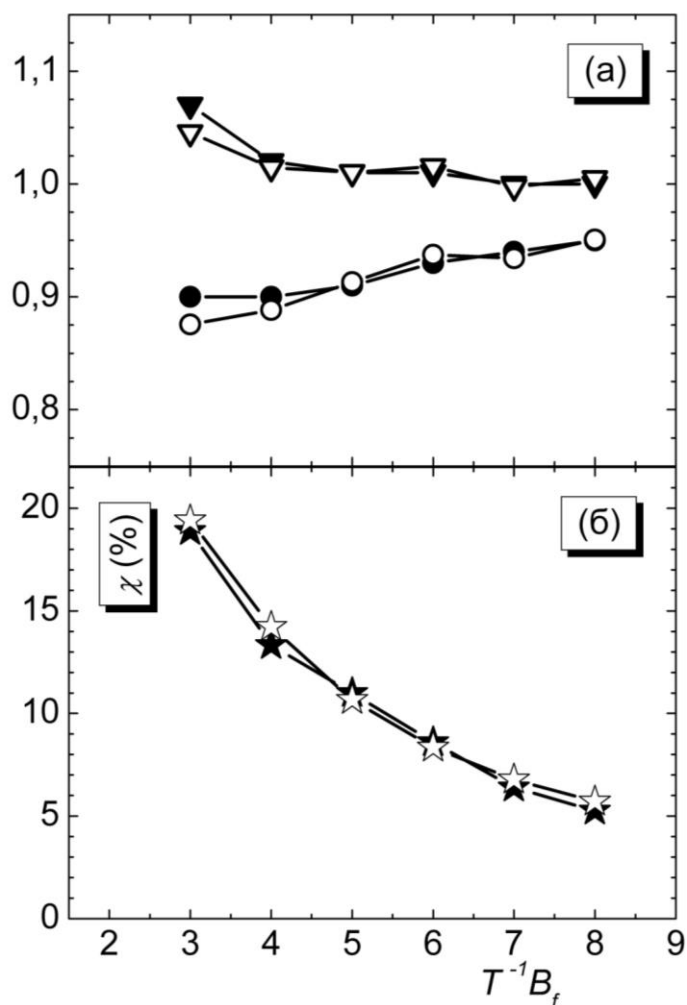


Рисунок 6. Сравнение наших результатов (открытые символы) с предшественниками [29] (закрытые символы). а) $J_{qs}/J_l, R_{Dqs}/R_l$ (треугольники). б) χ (круглые символы).

Динамическое моделирование выполнено для ВР при $\beta = 15$ зсек⁻¹, $m = 100$ МэВ·зсек².

Параметры N_{tot}, T, t_D, τ варьировались. На обеих панелях статистические погрешности не превосходят размеров символов

Из рисунка видно, что согласие наших расчётов с результатами предшественников наблюдается на всём рассматриваемом диапазоне $T^{-1}B_f$. Это согласие является ещё одним аргументом в пользу адекватности построенной динамической модели.

Заключение

Описана динамическая модель деления возбуждённых атомных ядер. При этом процесс деления ядра представлялся, как блуждание воображаемой броуновской частицы в пространстве коллективных переменных p и q . В качестве динамических уравнение использованы стохастические уравнения Ланжевена. Приведены аргументы в пользу адекватности модели. Одним из аргументов является статистическое согласие численного и аналитического решений полных уравнений Ланжевена. Вторым аргументом выступает согласие результатов, полученных с помощью динамического моделирования, с результатами, полученными при аналитическом решении уравнений Смолуховского.

Список литературы

- 1 Y. Abe, C. Gregoire and H. Delagrange «Langevin approach to nuclear dissipative dynamics» // *Journal de Physique* (1986) V. 47, p. 329 – 338.
- 2 G.E. Uhlenbeck and L.S. Ornstein «On the theory of the Brownian motion» // *Physical Review* (1930) V. 36, P. 823 – 841.
- 3 S. Chandrasekhar «Stochastic problems in physics and astronomy» // *Reviews of Modern Physics* (1943) V. 15, № 1, p. 1 – 89.
- 4 H. Risken «The Fokker-Planck equation» (1984) Springer-Verlag, p 472.
- 5 H.A. Kramers «Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reaction» // *Physica* (1940) V. 7, p. 284 – 304.
- 6 N.D. Mavlitov, P. Fröbrich and I.I. Gonchar «Combining a Langevin description of heavy-ion induced fission including neutron evaporation with the statistical model» // *Zeitschrift für Physik A* (1992) V. 342, p. 195 – 198.
- 7 P. Fröbrich, I.I. Gontchar and N.D. Mavlitov «Langevin fluctuation-dissipation dynamics of hot nuclei: Precission neutron multiplicities and fission probabilities» // *Nuclear Physics A* (1993) V. 556, P. 281 – 306.
- 8 I.I. Gontchar and P. Fröbrich «Nuclear fission: combining the dynamical Langevin equation with the statistical model» // *Nuclear Physics A* (1993) V. 551, p. 495 – 507.
- 9 I.I. Gontchar, P. Fröbrich and N.I. Pischasov «Consistent dynamical and statistical description of fission of hot nuclei» // *Physical Review C* (1993) V. 47, № 5, p. 2228 – 2235.
- 10 I. Gontchar, L.A. Litnevsky and P. Fröbrich «A C-code for combining a Langevin fission dynamics of hot nuclei with a statistical model including evaporation of light particles and giant dipole – quanta» // *Computer Physics Communications* (1997) V. 107, p. 223 – 245.
- 11 P. Fröbrich and I.I. Gontchar «Langevin description of fusion, deep-inelastic collisions and heavy-ion-induced fission» // *Physics Reports* (1998) V. 292, № 3 & 4, p. 131 – 237.
- 12 L. Donadille, E. Liatard, B. Benoit, F. Hanappe, L. Stuttge, G. Rudolf, E.M. Kozulin, Yu.A. Lazarev, P. Desesquelles, L.A. Litnevsky, B. Bilwes, J.-F. Bruandet, G.J. Costa, O. Dorvaux, F. Farget, J. Fayot, G. Guillaume, A. Huck, I. Itkis, M.G. Itkis, S. Jokic, N.A. Kondratiev, F.-R. Lecolley, J.-F. Lecolley, Yu.Ts. Oganessian, G. Perrin, D. Santos, F. Schussler, S. Tomasevic, J.-B. Viano, B. Vignon «Fission dynamics for capture reactions in $58,64\text{Ni} + 208\text{Pb}$ systems: New results in terms of thermal energy and neutron multiplicity correlated distributions» // *Nuclear Physics A* (1999) V. 656 p. 259 – 283.
- 13 K. Pomorski, B. Nerlo-Pomorska, A Surowiec, M. Kowal, J. Bartel, K. Dietrich, J. Richert, C. Schmitt, B. Benoit, E. de Goes Brennard, L. Donadille, C. Badimon «Light-particle emission from the fissioning nuclei 126Ba , 188Pt and $266,272,278110$: theoretical predictions and experimental results» // *Nuclear Physics A* (2000) V. 679, p. 25 – 53.
- 14 G. Chaudhuri and S. Pal «Precission neutron multiplicity and fission probability from Langevin dynamics of nuclear fission» // *Physical Review C* (2002) V. 65, 054612.
- 15 И.И. Гончар, Н.А. Пономаренко, В.В. Туркин и Л.А. Литневский «Теоретическое исследование зависимости среднего времени деления возбуждённых атомных ядер от углового момента» // *Ядерная физика* (2004) Т. 67, № 11, с 2101 – 2115.
- 16 W. Ye «Effect of isospin on the evaporation residue cross section» // *Physical Review C* (2007) V. 76, 021604(R).
- 17 М.Н. Ёсламизаде, В.А. Дроздов, Д.О. Еременко, С. Ю. Платонов, О.В. Фотина and О.А. Yuminov «A dynamical-statistical model of nuclear fission of heavy elements» // *Moscow University Physics Bulletin* (2008) V. 63, № 1, p. 24 – 27.
- 18 N. Chen and W. Ye «Roles of isospin in evaporation residue cross section as a probe of

- nuclear dissipation» // *Communication in Theoretical Physics* (2008) V. 49, № 3, p. 739 – 742.
- 19 W. Ye, H.W. Yang and F. Wu « Isospin effects on the evaporation residue spin distribution» // *Physical Review C* (2008) V. 77, 011302(R).
- 20 W. Ye «Isospin effects on neutrons as a probe of nuclear dissipation» // *Physical Review C* (2009) V. 79, 031601(R).
- 21 W. Ye «Significant role of deformation in probing postsaddle nuclear dissipation with light particle emission» // *Physical Review C* (2010) V 81, 054609.
- 22 D.V. Vanin, G.I. Kosenko and G.D. Adeev «Langevin calculation of fission fragment mass distribution in fission of excited nuclei» // *Physical Review C* (1999) V. 59, № 4, P. 2114 – 2121.
- 23 И.И. Гончар, А.Э. Геттингер, Л.В. Гурьян и В. Вагнер «Много-мерная динамическо-статистическая модель деления возбуждённых ядер» // *Ядерная физика* (2000) Т. 63, № 10, С. 1778 – 1797.
- 24 I. Gontchar, M. Morjean and S. Basnary «Nuclear dissipation from fission time» // *Euro Physics Letters* (2002) V. 57(3), P. 355 – 361.
- 25 W. Wagner, I.I. Gontchar, A.E. Gettinger, L.A. Litnevsky, H.-G. Ortlepp and D.V. Kamanin «Novel Features of the fragment mass variance in fission of hot nuclei» // *Yadernaya Fizika* (2002) V. 65, № 8, P. 1 – 8.
- 26 Y. Jia and J.-D. Bao «Calculations of the anisotropy of the fission fragment angular distribution and neutron emission multiplicities Prescission from Langevin dynamics» // *Physical Review C* (2007) V. 75, 034601.
- 27 A.V. Karpov, P.N. Nadtochy, D.V. Vanin and G.D. Adeev «Three-dimensional Langevin calculations of fission fragment mass-energy distribution from excited compound nuclei» // *Physical Review C* (2001) V. 63, 054610.
- 28 A.V. Karpov, P.N. Nadtochy, E.G. Ryabov and G.D. Adeev «Consistent application of the finite-range liquid-drop model to Langevin fission dynamics of hot rotating nuclei» // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* (2003) V. 29, p. 2365 – 2380.
- 29 Г.Д. Адеев, А.В. Карпов, П.Н. Надточий и Д.В. Ванин «Много-мерный стохастический подход к динамике деления возбуждённых ядер» // *Физика Элементарных Частиц и Атомного Ядра* (2005) Т. 36, вып. 4, с. 731 – 814.
- 30 P.N. Nadtochy, A. Kelic and K.-H. Schmidt «Fission rate in multi-dimensional Langevin calculation» // *Physical Review C* (2007) V. 75, 064614.
- 31 E.G. Ryabov, A.V. Karpov, P. N. Nadtochy and G. D. Adeev «Application of a temperature-dependent liquid-drop model to dynamical Langevin calculation of fission-fragment distribution of excited nuclei» // *Physical Review C* (2008) V. 78, 044614.
- 32 C. Schmitt, P.N. Nadtochy, A. Heinz, B. Jurado, A. Kelic and K.-H. Schmidt «First experiment on fission transient in fissile spherical nuclei produced by fragmentation of radioactive beams» // *Physical Review Letters* (2007) V. 99, 042701.
- 33 Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц «Механика» серия: «Теоретическая физика» том 1 (1988) Государственное издательство физико-математической литературы, с. 216.
- 34 O. Edholm and O. Leimar «The accuracy of Kramers' theory of chemical kinetics» // *Physica* (1979) V. 98A, p. 313 – 324.
- 35 H.C. Brinkman «Brownian motion in a field of force and the diffusion theory of chemical reactions» // *Physica* (1956) V. 22, p. 29 – 34.
- 36 N.G. van Kampen «A soluble model for diffusion in a bistable potential» // *Journal of Statistical Physics* (1977) V. 17, № 2, p. 71 – 88.
- 37 R.S. Larson and M.D. Kostin «Kramers's theory of chemical kinetics: eigenvalue and eigenfunction analysis» // *Journal of Chemical Physics* (1978) V. 69, 4821.
- 38 J.F. Gouyet and A. Bunde «Diffusion in a bistable potential at intermediate and high friction» // *Journal of Statistical Physics* (1984) V. 36, p. 43 – 64.

- 39 G.H. Weiss «Overview of theoretical models for reaction rates» // Journal of Statistical Physics (1986) V. 42, p. 3 – 36.
- 40 L. Schimansky-Geier and H. Herzel «Positive Lyapunov exponents in the Framer oscillator» // Journal of Statistical Physics (1993) V. 70, p. 141 – 147.
- 41 D.L. Stein «Critical behavior of Kramers escape rate in asymmetric classical field theories» // Journal of Statistical Physics (2004) V. 114, p. 1537 – 1556.
- 42 E. Vanden-Eijnden and M.G. Westdickenberg «Rare events in stochastic partial differential equations on large spatial domains» // Journal of Statistical Physics (2008) V. 131, p. 1023 – 1038.
- 43 N. Berglund and B. Gentz «Anomalous behavior of the Kramers rate at bifurcation in classical field theories» // <http://arxiv.org/abs/0809.2652v2>.

Н. Е. Ақтаев

Тюмень мемлекеттік университеті, Тюмень, Ресей

Қозған атом ядроларының динамикалық бөліну моделінің сәйкестігі

Аңдатпа. Жұмыста қозған атом ядроларының бөліну моделі келтірілген. Модельдің негізін лангевиннің стохастикалық дифференциалдық теңдеуі. Лангевин көзінің амплитудасы ақ шуымен сипатталады. Модельдеудің жеткіліктілігі екі жолмен тексеріледі: лангевин теңдеуінің аналитикалық шешімін гармоникалық осциллятор режиміндегі санмен салыстыру және сандық модельдеу нәтижелерін басқа авторлар алған нәтижелермен салыстыру. Екі жағдайда да динамикалық модельдеу нәтижелері жеткілікті дәлдікті қамтамасыз ететіні көрсетілген.

Түйін сөздер: атом ядросы, Лангевин теңдеулері, Эйлер әдісі, Фоккер-Планк теңдеуі, ядроның бөлінуі.

N. Aktaev

Tyumen State University, Tyumen, Russia

Adequacy of the dynamic model of fission of excited atomic nuclei

Abstract. The paper presents a model of fission of excited atomic nuclei. The model is based on the stochastic Langevin differential equation. The amplitude of the Langevin source is characterized by white noise. The adequacy of modeling is tested in two ways: by comparing the analytical solution of the Langevin equation with the numerical one in the harmonic oscillator mode and by comparing the results of numerical modeling with the results obtained by other authors. It is shown that in both cases the results of dynamic modeling provide sufficient accuracy.

Keywords: atomic nucleus, Langevin equations, Euler method, Fokker-Planck equation, nuclear fission.

References

- 1 Y. Abe, C. Gregoire and H. Delagrange «Langevin approach to nuclear dissipative dynamics» // Journal de Physique (1986) V. 47, p. 329 – 338.
- 2 G.E. Uhlenbeck and L.S. Ornstein «On the theory of the Brownian motion» // Physical Review (1930) V. 36, P. 823 – 841.
- 3 S. Chandrasekhar «Stochastic problems in physics and astronomy» // Reviews of Modern Physics (1943) V. 15, № 1, p. 1 – 89.
- 4 H. Risken «The Fokker-Planck equation» (1984) Springer-Verlag, p 472.

- 5 H.A. Kramers «Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reaction» // *Physica* (1940) V. 7, p. 284 – 304.
- 6 N.D. Mavlitov, P. Fröbrich and I.I. Gonchar «Combining a Langevin description of heavy-ion induced fission including neutron evaporation with the statistical model» // *Zeitschrift für Physik A* (1992) V. 342, p. 195 – 198.
- 7 P. Fröbrich, I.I. Gontchar and N.D. Mavlitov «Langevin fluctuation-dissipation dynamics of hot nuclei: Precission neutron multiplicities and fission probabilities» // *Nuclear Physics A* (1993) V. 556, P. 281 – 306.
- 8 I.I. Gontchar and P. Fröbrich «Nuclear fission: combining the dynamical Langevin equation with the statistical model» // *Nuclear Physics A* (1993) V. 551, p. 495 – 507.
- 9 I.I. Gontchar, P. Fröbrich and N.I. Pischasov «Consistent dynamical and statistical description of fission of hot nuclei» // *Physical Review C* (1993) V. 47, № 5, p. 2228 – 2235.
- 10 I. Gontchar, L.A. Litnevsky and P. Fröbrich «A C-code for combining a Langevin fission dynamics of hot nuclei with a statistical model including evaporation of light particles and giant dipole – quanta» // *Computer Physics Communications* (1997) V. 107, p. 223 – 245.
- 11 P. Fröbrich and I.I. Gontchar «Langevin description of fusion, deep-inelastic collisions and heavy-ion-induced fission» // *Physics Reports* (1998) V. 292, № 3 & 4, p. 131 – 237.
- 12 L. Donadille, E. Liatard, B. Benoit, F. Hanappe, L. Stuttge, G. Rudolph, E.M. Kozulin, Yu.A. Lazarev, P. Desesquelles, L.A. Litnevsky, B. Bilwes, J.-F. Bruandet, G.J. Costa, O. Dorvaux, F. Farget, J. Fayot, G. Guillaume, A. Huck, I. Itkis, M.G. Itkis, S. Jokic, N.A. Kondratiev, F.-R. Lecolley, J.-F. Lecolley, Yu.Ts. Oganessian, G. Perrin, D. Santos, F. Schussler, S. Tomasevic, J.-B. Viano, B. Vignon «Fission dynamics for capture reactions in $58,64\text{Ni} + 208\text{Pb}$ systems: New results in terms of thermal energy and neutron multiplicity correlated distributions» // *Nuclear Physics A* (1999) V. 656 p. 259 – 283.
- 13 K. Pomorski, B. Nerlo-Pomorska, A Surowiec, M. Kowal, J. Bartel, K. Dietrich, J. Richert, C. Schmitt, B. Benoit, E. de Goes Brennand, L. Donadille, C. Badimon «Light-particle emission from the fissioning nuclei 126Ba , 188Pt and $266,272,278,110$: theoretical predictions and experimental results» // *Nuclear Physics A* (2000) V. 679, p. 25 – 53.
- 14 G. Chaudhuri and S. Pal «Precission neutron multiplicity and fission probability from Langevin dynamics of nuclear fission» // *Physical Review C* (2002) V. 65, 054612.
- 15 И.И. Гончар, Н.А. Пономаренко, В.В. Туркин и Л.А. Литневский «Теоретическое исследование зависимости среднего времени деления возбуждённых атомных ядер от углового момента» // *Ядерная физика* (2004) Т. 67, № 11, с 2101 – 2115.
- 16 W. Ye «Effect of isospin on the evaporation residue cross section» // *Physical Review C* (2007) V. 76, 021604(R).
- 17 M.H. Éslamizadeh, V.A. Drozdov, D.O. Eremenko, S. Yu. Platonov, O.V. Fotina and O.A. Yuminov «A dynamical-statistical model of nuclear fission of heavy elements» // *Moscow University Physics Bulletin* (2008) V. 63, № 1, p. 24 – 27.
- 18 N. Chen and W. Ye «Roles of isospin in evaporation residue cross section as a probe of nuclear dissipation» // *Communication in Theoretical Physics* (2008) V. 49, № 3, p. 739 – 742.
- 19 W. Ye, H.W. Yang and F. Wu « Isospin effects on the evaporation residue spin distribution» // *Physical Review C* (2008) V. 77, 011302(R).
- 20 W. Ye «Isospin effects on neutrons as a probe of nuclear dissipation» // *Physical Review C* (2009) V. 79, 031601(R).
- 21 W. Ye «Significant role of deformation in probing postsaddle nuclear dissipation with light particle emission» // *Physical Review C* (2010) V 81, 054609.
- 22 D.V. Vanin, G.I. Kosenko and G.D. Adeev «Langevin calculation of fission fragment mass distribution in fission of excited nuclei» // *Physical Review C* (1999) V. 59, № 4, P. 2114 – 2121.
- 23 И.И. Гончар, А.Э. Геттингер, Л.В. Гурьян и В. Вагнер «Много-мерная динамическо-статистическая модель деления возбуждённых ядер» // *Ядерная физика* (2000) Т. 63, № 10, С. 1778 –

1797.

- 24 I. Gontchar, M. Morjean and S. Basnary «Nuclear dissipation from fission time» // *Euro Physics Letters* (2002) V. 57(3), P. 355 – 361.
- 25 W. Wagner, I.I. Gontchar, A.E. Gettinger, L.A. Litnevsky, H.-G. Ortlepp and D.V. Kamanin «Novel Features of the fragment mass variance in fission of hot nuclei» // *Yadernaya Fizika* (2002) V. 65, № 8, P. 1 – 8.
- 26 Y. Jia and J.-D. Bao «Calculations of the anisotropy of the fission fragment angular distribution and neutron emission multiplicities Prescission from Langevin dynamics» // *Physical Review C* (2007) V. 75, 034601.
- 27 A.V. Karpov, P.N. Nadtochy, D.V. Vanin and G.D. Adeev «Three-dimensional Langevin calculations of fission fragment mass-energy distribution from excited compound nuclei» // *Physical Review C* (2001) V. 63, 054610.
- 28 A.V. Karpov, P.N. Nadtochy, E.G. Ryabov and G.D. Adeev «Consistent application of the finite-range liquid-drop model to Langevin fission dynamics of hot rotating nuclei» // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* (2003) V. 29, p. 2365 – 2380.
- 29 Г.Д. Адеев, А.В. Карпов, П.Н. Надточий и Д.В. Ванин «Много-мерный стохастический подход к динамике деления возбуждённых ядер» // *Физика Элементарных Частиц и Атомного Ядра* (2005) Т. 36, вып. 4, с. 731 – 814.
- 30 P.N. Nadtochy, A. Kelic and K.-H. Schmidt «Fission rate in multi-dimensional Langevin calculation» // *Physical Review C* (2007) V. 75, 064614.
- 31 E.G. Ryabov, A.V. Karpov, P. N. Nadtochy and G. D. Adeev «Application of a temperature-dependent liquid-drop model to dynamical Langevin calculation of fission-fragment distribution of excited nuclei» // *Physical Review C* (2008) V. 78, 044614.
- 32 C. Schmitt, P.N. Nadtochy, A. Heinz, B. Jurado, A. Kelic and K.-H. Schmidt «First experiment on fission transient in fissile spherical nuclei produced by fragmentation of radioactive beams» // *Physical Review Letters* (2007) V. 99, 042701.
- 33 Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц «Механика» серия: «Теоретическая физика» том 1 (1988) Государственное издательство физико-математической литературы, с. 216.
- 34 O. Edholm and O. Leimar «The accuracy of Kramers' theory of chemical kinetics» // *Physica* (1979) V. 98A, p. 313 – 324.
- 35 H.C. Brinkman «Brownian motion in a field of force and the diffusion theory of chemical reactions» // *Physica* (1956) V. 22, p. 29 – 34.
- 36 N.G. van Kampen «A soluble model for diffusion in a bistable potential» // *Journal of Statistical Physics* (1977) V. 17, № 2, p. 71 – 88.
- 37 R.S. Larson and M.D. Kostin «Kramers's theory of chemical kinetics: eigenvalue and eigenfunction analysis» // *Journal of Chemical Physics* (1978) V. 69, 4821.
- 38 J.F. Gouyet and A. Bunde «Diffusion in a bistable potential at intermediate and high friction» // *Journal of Statistical Physics* (1984) V. 36, p. 43 – 64.
- 39 G.H. Weiss «Overview of theoretical models for reaction rates» // *Journal of Statistical Physics* (1986) V. 42, p. 3 – 36.
- 40 L. Schimansky-Geier and H. Herzel «Positive Lyapunov exponents in the Framer's oscillator» // *Journal of Statistical Physics* (1993) V. 70, p. 141 – 147.
- 41 D.L. Stein «Critical behavior of Kramers escape rate in asymmetric classical field theories» // *Journal of Statistical Physics* (2004) V. 114, p. 1537 – 1556.
- 42 E. Vanden-Eijnden and M.G. Westdickenberg «Rare events in stochastic partial differential equations on large spatial domains» // *Journal of Statistical Physics* (2008) V. 131, p. 1023 – 1038.
- 43 N. Berglund and B. Gentz «Anomalous behavior of the Kramers rate at bifurcation in classical field theories» // <http://arxiv.org/abs/0809.2652v2>.

Сведения об авторах:

Н.Е. Актаев – Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия.

Н.Е. Ақтаев – Тюмень мемлекеттік университеті, Тюмень, Ресей.

N. Aktaev – Tyumen State University, Tyumen, Russia.