

ISSN (Print) 2616-6836  
ISSN (Online) 2663-1296

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

# ХАБАРШЫСЫ

---

**BULLETIN**

of L.N. Gumilyov Eurasian  
National University

**ВЕСТНИК**

Евразийского национального  
университета имени Л.Н. Гумилева

**ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ** сериясы

**PHYSICS. ASTRONOMY** Series

Серия **ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

№4(129)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

**Нұр-Сұлтан, 2019**

**Nur-Sultan, 2019**

**Нур-Султан, 2019**

*Бас редакторы:*  
ф.-м.ғ.д., профессор  
**А.Т. Ақылбеков** (Қазақстан)

*Бас редактордың орынбасары*

**Гиниятова Ш.Г.**, ф.-м.ғ.к., доцент  
(Қазақстан)

*Редакция алқасы*

<b>Арынгазин А.Қ.</b>	ф.-м.ғ. докторы(Қазақстан)
<b>Алдонгаров А.А.</b>	PhD (Қазақстан)
<b>Балапанов М.Х.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Бахтизин Р.З.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Даулетбекова А.Қ.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Ержанов Қ.К.</b>	ф.-м.ғ.к., PhD (Қазақстан)
<b>Жұмаділов Қ.Ш.</b>	PhD (Қазақстан)
<b>Здоровец М.</b>	ф.-м.ғ.к.(Қазақстан)
<b>Қадыржанов Қ.К.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Кайнарбай А.Ж.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Кутербеков Қ.А.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Лущик А.Ч.</b>	ф.-м.ғ.д., проф.(Эстония)
<b>Морзабаев А.К.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Мырзақұлов Р.Қ.</b>	ф.-м.ғ.д., проф.(Қазақстан)
<b>Нұрахметов Т.Н.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Сауытбеков С.С.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Салиходжа Ж.М.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Тлеукенов С.К.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Усеинов А.Б.</b>	PhD (Қазақстан)
<b>Хоши М.</b>	PhD, проф.(Жапония)

*Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтбаев к-сі, 2, 402 б.,  
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.  
Тел.: +7(7172) 709-500 (ішкі 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Жауапты хатшы, компьютерде беттеген:* А. Нұрболат

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы.**  
**ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы**

Меншіктенуші: ҚР БЖҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК  
Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде 27.03.2018ж.  
№16999-ж тіркеу куәлігімен тіркелген.

Ашық қолданудағы электрондық нұсқа: <http://bulphysast.enu.kz/>

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі, 12/1, 349 б.,  
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті. Тел.: +7(7172)709-500 (ішкі 31-428)

*Editor-in-Chief*

Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor  
**A.T. Akilbekov** (Kazakhstan)

*Deputy Editor-in-Chief*

**Giniyatova Sh.G.**, Candidate of Phys.-Math. Sciences,  
Assoc. Prof. (Kazakhstan)

*Editorial Board*

<b>Aryngazin A.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Aldongarov A.A.</b>	PhD (Kazakhstan)
<b>Balapanov M.Kh.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
<b>Bakhtizin R.Z.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
<b>Dauletbekova A.K.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD (Kazakhstan)
<b>Hoshi M.</b>	PhD, Prof. (Japan)
<b>Kadyrzhanov K.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Kainarbay A.Zh.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Kuterbekov K.A.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Lushchik A.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Estonia)
<b>Morzabayev A.K.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Myrzakulov R.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Nurakhmetov T.N.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Sautbekov S.S.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Salikhodzha Z. M</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Tleukenov S.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Useinov A.B.</b>	PhD (Kazakhstan)
<b>Yerzhanov K.K.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD (Kazakhstan)
<b>Zdorovets M.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Zhumadilov K.Sh.</b>	PhD (Kazakhstan)

*Editorial address:* L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2, Satpayev str., of. 402,  
Nur-Sultan, Kazakhstan 010008  
Tel.: +7(7172) 709-500 (ext. 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Responsible secretary, computer layout:* A.Nurbolat

**Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.**

**PHYSICS. ASTRONOMY Series**

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №16999-ж from 27.03.2018.

Available at: <http://bulphysast.enu.kz/>

Address of printing house: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 12/1 Kazhimukan str.,  
Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;

tel.: +7(7172) 709-500 (ext. 31-428)

*Главный редактор:*  
доктор ф.-м.н.  
**А.Т. Акилбеков**, доктор ф.-м.н., профессор (Казахстан)

*Зам. главного редактора*

**Ш.Г. Гиниятова** к.ф.-м.н., доцент  
(Казахстан)

*Редакционная коллегия*

<b>Арынгазин А.К.</b>	доктор ф.-м.н.(Казахстан)
<b>Алдонгаров А.А.</b>	PhD (Казахстан)
<b>Балапанов М.Х.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Бахтизин Р.З.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Даулетбекова А.К.</b>	д.ф.-м.н., PhD (Казахстан)
<b>Ержанов К.К.</b>	к.ф.-м.н., PhD (Казахстан)
<b>Жумадилов К.Ш.</b>	PhD (Казахстан)
<b>Здоровец М.</b>	к.ф.-м.н.(Казахстан)
<b>Кадыржанов К.К.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Кайнарбай А.Ж.</b>	к.ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Кутербеков К.А.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Лущик А.Ч.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Эстония)
<b>Морзабаев А.К.</b>	д.ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Мырзакулов Р.К.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Нурахметов Т.Н.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Сауытбеков С.С.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Салиходжа Ж.М</b>	к.ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Тлеукунов С.К.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Усеинов А.Б.</b>	PhD (Казахстан)
<b>Хоши М.</b>	PhD, проф. (Япония)

*Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.  
Тел.: (7172) 709-500 (вн. 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Ответственный секретарь, компьютерная верстка:* А. Нурболат

**Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.**  
**Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

Собственник РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК  
Периодичность: 4 раза в год

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №16999-ж от 27.03.2018г.

Электронная версия в открытом доступе: <http://bulphysast.enu.kz/>

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажимукана, 12/1, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева. тел.: +7(7172)709-500 (вн. 31-428)

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ  
ХАБАРШЫСЫ. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

№4(129)/2019

МАЗМҰНЫ

<i>Ибраева А.Д., Янсе А. Вуурен Ван, Скуратов В.А., Здоровец М.В.</i> Кристалды Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> -те латентті тректердің пайда болу энергиясының ионизациялық жоғалтуының шекті деңгейін анықтау	8
<i>Алдонгаров А.А., Асылбекова А.М., Иргибаетова И.С.</i> Кумарин бояғышымен байланысты CdS кластерлерінде электрондық ауысуларды есептеу	15
<i>Ермекова Ж.К., Алдонгаров А.А., Сағындықова Ғ.Е., Есманова С.С.</i> Педагогикалық мамандық студенттерінің сыни ойлауын дамыту	27
<i>Карипбаев Ж.Т., Абуова А.У., Алтысова Г.К., Сәрсенғалиева К.М., Байжолов К.А., Кукенова А.Б., Здоровец М.В.</i> Оттегі енгізілген ZnWO <sub>4</sub> кристалдарының люминесценциясы	33
<i>Кабышев А.М., Кутербеков К.А., Мұхамбетжан А.М., Нуржанов А.Б., Уәлшерев Д.Т., Бекмырза К.Ж., Рахимғалиева И.Т., Сарсенов Р.М., Махамбаева И.У.</i> 8-217 МэВ энергиясы кезінде <sup>28</sup> Si ядросында <sup>3</sup> He серпімді шашырауын зерттеу	42
<i>Мусаханов Д.А., Лисицын В.М., Карипбаев Ж.Т., Алтысова Г.К., Голковский М.Г., Даулетбекова А.К., Козловский А., Здоровец М.В.</i> Қуатты электронды ағынында синтезделген MgF <sub>2</sub> -WO <sub>2</sub> керамикасының құрылымы	51
<i>Каргин Д., Козловский А., Алтынов Е., Касымханов, А.Бисекен, Мухамбетов Д.</i> Болат илемдеу өндірісінің қосалқы өнімдер бөлшектерінің морфологиясы	59
<i>Мусатаева А.Б., Мырзакулов Н.А.</i> Камасс-Холм теңдеуі үшін беттің бірінші және екінші фундаменталды формасы	65
<i>Серикбаев Н.С., Нугманова Г.Н., Мырзакулов Р.</i> (2+1)-өлшемді Дэви-Стюартсон I теңдеуінің екікомпонентті жалпылануы I	73
<i>Ногай А.С., Кутербеков К.А., Ускенбаев Д.Е., Бекмырза К.Ж., Ногай А.А., Кабышев А.М.</i> Платинасыз катализаторлары бар нафион типті мембраналардағы жылу релаксациялық поляризациясының ерекшеліктері	80
<i>Нурсултанова Н.С., Жумадилов К.Ш.</i> Төмен доза әсер ету ықпалын бағалау мәселесі	86
<i>Шанина З.К.</i> Конно-Оно теңдеуінің дисперсиясыз шегі	93
<i>Шаханова Г.А.</i> Ақыл-ой карталарын оқу үдерісінде идеяларды қалыптастыру және құрылымдау әдісі ретінде қолдану	99
<i>Русақова А.В., Акилбеков А.Т., Жунусова М.К.</i> Нейтрондармен сәулеленген GaAs диэлектрлік қасиеттерін күйдіру	107

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. PHYSICS.  
ASTRONOMY SERIES

№4(129)/2019

CONTENTS

<i>Ibrayeva A.D., Janse A. Vuuren Van, Skuratov V.A., Zdorovets M.V.</i> About determination of the threshold ionization energy losses for the latent tracks formation in crystalline $\text{Si}_3\text{N}_4$	8
<i>Aldongarov A.A., Assilbekova A.M., Irgibaeva I.S.</i> Calculation of electronic transitions in CdS clusters associated with coumarin dye	15
<i>Ermekova Zh.K., Aldongarov A.A., Sagyndykova G.E., Esmanova S.S.</i> Development of critical thinking of students of pedagogical specialties	27
<i>Karipbaev Zh.T., Abuova A.U. Alpyssova G.K., Sarsengalieva K.M., Baozholov K.A., Kukenova A.B., Zdorovets M.V.</i> Luminescence of $\text{ZnWO}_4$ crystals with oxygen introduced	33
<i>Kabyshv A.M., Kuterbekov K.A., Mukhambetzhana A.M., Nurzhanov A.B., Ualsherov D.T., Bekmyrza K.Zh., Rakhimgaliyeva I.T., Sarsenov R.M., Makhambayeva .U.</i> Study of the elastic scattering of $^3\text{He}$ on the $^{28}\text{Si}$ nucleus at the energy of 8 -217 MeV	42
<i>Musahanov D., Lisitsyn V., Karipbaev Zh., Alpyssova G., Golkovskii M., Dauletbekova A., Kozlovskii A., Zdorovec M.</i> The structure of $\text{MgF}_2\text{-WO}_2$ ceramic synthesized in a powerful electron flow	51
<i>Kargin D., Kozlovskij A., Altynov E., Kasymhanov Zh., Biseken A., Muhambetov D.</i> Morphology of the particles of by-products of steel rolling production	59
<i>Mussatayeva A.B., Myrzakulov N.A.</i> The first and second fundamental forms for the Camassa-Holm equation	65
<i>Serikbayev N.S., Nugmanova G.N., Myrzakulov R.</i> On the Integrable Two-Component (2+1)-dimensional Davey-Stewartson Equation	73
<i>Nogay A.S., Kuterbekov K.A., Uskenbayev D.E., Bekmyrza K.Zh., Nogay A.A., Kabyshv A.M.</i> Features of thermal relaxation of polarization in the Nafion membranes with no platinum catalysts	80
<i>Nursultanova N., Zhumadilov K.</i> The problem of assessing the effects of low-dose exposure	86
<i>Shanina Z.K.</i> Dispersionless limit of the Konno-Oono equation	93
<i>Shakhanova G.A.</i> Mind maps as a method of generating and structuring ideas in the learning process	99
<i>Russakova A.V., Akilbekov A.T., Zhunusova M.K.</i> Annealing of dielectric properties of GaAs Crystals Irradiated by Neutrons	107

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

№4(129)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ибраева А.Д., Янсе А. Вуурен Ван., Скуратов В.А., Здоровец М.В.</i> К вопросу об определении порогового уровня ионизационных потерь энергии образования латентных треков в кристаллическом $\text{Si}_3\text{N}_4$	8
<i>Алдонгаров А.А., Асылбекова А.М., Иргибаетова И.С.</i> Расчет электронных переходов в кластерах CdS, связанных с кумариновым красителем	15
<i>Ермекова Ж.К., Алдонгаров А.А., Сагындыкова Г.Е., Есманова С.С.</i> Развитие критического мышления студентов педагогических специальностей	27
<i>Карипбаев Ж.Т., Абуова А.У., Алтысова Г.К., Сарсенгалиева К.М., Байжолов К.А., Кукенова А.Б., Здоровец М.В.</i> Люминесценция кристаллов $\text{ZnWO}_4$ с введенным кислородом	33
<i>Кабышев А.М., Кутербеков К.А., Мухамбетжан А.М., Нуржанов А.Б., Уалшеров Д.Т., Бекмырза К.Ж., Рахимгалиева И.Т., Сарсенов Р.М., Махамбаева И.У.</i> Изучение упругого рассеяния $^3\text{He}$ на ядре $^{28}\text{Si}$ при энергии 8-217 МэВ	42
<i>Мусаханов Д.А., Лисицын В.М., Карипбаев Ж.Т., Алтысова Г.К., Голковский М.Г., Даулетбекова А.К., Козловский А., Здоровец М.В.</i> Структура керамики $\text{MgF}_2\text{-WO}_2$ , синтезированной в мощном потоке электронов	51
<i>Каргин Д., Козловский А., Алтынов Е., Касымханов, А.Бисекен, Д.Мухамбетов</i> Морфология частиц побочных продуктов сталепрокатного производства	59
<i>Мусатаева А.Б., Мырзакулов Н.А.</i> Первая и вторая фундаментальные формы поверхности для уравнения Камасса-Холма	65
<i>Серикбаев Н.С., Нугманова Г.Н., Мырзакулов Р.</i> О двухкомпонентном обобщении (2+1)-мерного уравнения Дэви-Стюартсона I	73
<i>Ногай А.С., Кутербеков К.А., Ускенбаев Д.Е., Бекмырза К.Ж., Ногай А.А., Кабышев А.М.</i> Особенности тепловой релаксационной поляризации в мембранах типа нафион с без платиновыми катализаторами	80
<i>Нурсултанова Н.С., Жумадилов К.Ш.</i> Проблема оценки последствий воздействия низкой дозы облучения	86
<i>Шанина З.К.</i> Бездисперсионный предел уравнения Конно-Оно	93
<i>Шаханова Г.А.</i> Интеллект-карты как метод генерации и структурирования идей в учебном процессе	99
<i>Русакова А.В., Акилбеков А.Т., Жунусова М.К.</i> Отжиг диэлектрических свойств GaAs, компенсированного облучением нейтронами	107

**Z. K. Shanina**

*L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan  
(E-mail: shaninazk@gmail.com)*

### Dispersionless limit of the Konno-Oono equation <sup>1</sup>

**Abstract:** The study of integrable systems or solvable nonlinear differential equations (NDE) has been an active area of research since the discovery of the inverse scattering method. These equations are in a sense universal because they are found in many areas of physics and mathematics. By integrable systems, we mean those that have an infinite hierarchy of symmetries and conservation laws. There are several parallel construction schemes for the integrated systems. In addition to the integrable NDE, there is another important class of integrable partial differential equations: the so-called integrable hydrodynamic equations often called dispersionless equations. They often arise in various physics and mathematics problems and have been intensively studied in recent years. In this paper we investigate the coupled integrable dispersionless equation and its reduction. The dispersionless (quasiclassical) limit for the Konno-Oono equation is obtained and the Lax representation is constructed, which proves its integrability.

**Keywords:** Konno-Oono equation, dispersionless limit, Lax representation

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-6836-2019-129-4-93-98>

**1.Introduction.** During last few decades, the study of coupled nonlinear evolution equations has played an important role in explaining many interesting phenomena, such as the propagation of electromagnetic waves in impurity media, water waves, momentum in a biological circuit, etc. At the same time, the coupled integrable dispersionless equations (CIDE) aroused great interest due to their wide application in various fields of mathematics and physics, such as string theory, field theory, soliton theory, etc. [2]-[3]. Coupled integrable dispersionless systems are important equations of two-dimensional field theory. CIDE was first presented by Konno and Oono in [4] on the basis of the Lie group, and its generalization is an example of such a system [3]-[5], which aroused great interest through their good structure, integrability and the possibility of obtaining a soliton solution.

**2.The reduction of M-XXXII equation as Konno-Oono equation.** One of the important sections of nonlinear integrable systems are the dispersionless equations. Currently, foreign scientists, as well as a group of Kazakh scientists are conducting research in this area. New integrable dispersionless equations and their Lax representations were proposed in the papers [6]-[9]. The M-XXXII equation has the following form [6]

$$q_{xt} - 4aq + 2p_x = 0, \quad (1)$$

$$r_{xt} - 4ar - 2n_x = 0, \quad (2)$$

$$a_x - 0.5(rq)_t + qn - rp = 0, \quad (3)$$

$$\eta_x + rp - qn = 0, \quad (4)$$

$$p_x + 2i\omega p + 2\eta q = 0, \quad (5)$$

$$n_x - 2i\omega n - 2\eta r = 0, \quad (6)$$

where  $q, p$  are complex functions,  $r, n$  are conjugate complex functions of  $q$  and  $p$ , respectively;  $a, \eta$  are real functions,  $\omega$  is a constant.

---

<sup>1</sup>The work is performed under the financial support of the scientific and technical program (F.0811, 0118PK00935) MES RK.



**2.1.Lax representation** The M-XXXII equation (1)-(6) is integrable and its Lax representation (LR) is

$$\begin{aligned}\Psi_x &= U_1\Psi, \\ \Psi_t &= V_1\Psi.\end{aligned}$$

Here

$$U_1 = -i\lambda\sigma_3 + Q, \quad V_1 = \frac{i}{\lambda}F + \frac{i}{\lambda - \omega}G,$$

where

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a & -0.5q_t - p \\ 0.5r_t - n & -a \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \eta & p \\ n & -\eta \end{pmatrix}.$$

Note that from Eqs. (4)-(6) we get the following important formula

$$\eta^2 + np = const$$

or, for simplicity,

$$\eta^2 + np = 1.$$

### 2.2.Scale transformation

Consider the following scale transformation

$$a \rightarrow 0.25\rho, \quad (q, r) \rightarrow 0.5(q, r).$$

Under this transformation, the M-XXXII equation (1)-(6) becomes

$$\begin{aligned}q_{xt} - \rho q + 4p_x &= 0, \\ r_{xt} - \rho r - 4n_x &= 0, \\ \rho_x - 0.5(rq)_t + 2(qn - rp) &= 0, \\ \eta_x + 0.5(rp - qn) &= 0, \\ p_x + 2i\omega p + \eta q &= 0, \\ n_x - 2i\omega n - \eta r &= 0.\end{aligned}$$

### 2.3.Reduction $p = n = \eta = 0$

When  $p = n = \eta = 0$ , it looks like

$$\begin{aligned}q_{xt} - \rho q &= 0, \\ r_{xt} - \rho r &= 0, \\ \rho_x - 0.5(rq)_t &= 0,\end{aligned}$$

which is a more standard form of the generalized Konno-Oono equation (GKOE) with  $(r) \rightarrow (-r)$  [4]. Its LR is

$$\begin{aligned}\Psi_x &= U_2\Psi, \\ \Psi_t &= V_2\Psi\end{aligned}$$

Here

$$U_2 = -i\lambda\sigma_3 + Q, \quad V_2 = \frac{i}{\lambda}F,$$

where

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.5q \\ 0.5r & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \rho & -qt \\ r_t & -\rho \end{pmatrix}.$$

### 3.Dispersionless limit of the KOE

**Reduction**  $r = -\bar{q}$

The canonical members of the integrable system are the sine-Gordon ( $r = -q$ ), KdV ( $r = -1$ ), mKdV ( $r = \pm q$ ) and NLS ( $r = \pm \bar{q}$ ) equations. Here, we restrict our attention to the case  $r = -\bar{q}$  associated with the  $su(2)$  Lie algebra. At this reduction we obtain the following KOE

$$q_{xt} - \rho q = 0, \quad (7)$$

$$\rho_x + 0.5(|q|^2)_t = 0, \quad (8)$$

where the function  $q$  can be represented as an exponential function

$$q = \sqrt{u} e^{\frac{iS}{\epsilon}}. \quad (9)$$

Here  $u, S$  are real-valued functions,  $\epsilon$  is the quasiclassical limit from quantum mechanics corresponds to the dispersionless limit. The differentials of this function with respect to  $t$  and  $x$  are

$$\begin{aligned} q_t &= \left[ \frac{u_t}{2\sqrt{u}} + \frac{iS_t\sqrt{u}}{\epsilon} \right] e^{\frac{iS}{\epsilon}}, \\ q_x &= \left[ \frac{u_x}{2\sqrt{u}} + \frac{iS_x\sqrt{u}}{\epsilon} \right] e^{\frac{iS}{\epsilon}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Differentiating equation(10) by  $t$  we obtain

$$q_{xt} = \left\{ \left[ \left( \frac{u_x}{2\sqrt{u}} \right)_t - \frac{S_x S_t \sqrt{u}}{\epsilon^2} \right] + \frac{i}{\epsilon} \left[ S_{xt} \sqrt{u} + \frac{S_t u_x + S_x u_t}{2\sqrt{u}} \right] \right\} e^{\frac{iS}{\epsilon}}. \quad (11)$$

Using the following scale transformations

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \quad (13)$$

we rewrite the system of equations (7)-(8)

$$\epsilon^2 q_{xt} - \rho q = 0, \quad (14)$$

$$\epsilon \rho_x + 0.5\epsilon(|q|^2)_t = 0.$$

Taking into account equations (9) and (11) we solve equation (14)

$$-S_x S_t \sqrt{u} + i\epsilon \left\{ (S_x \sqrt{u})_t + \frac{S_t u_x}{2\sqrt{u}} \right\} - \rho \sqrt{u} = 0.$$

The limit at  $\epsilon \rightarrow 0$  of the resulting equation is called the dispersionless limit since the dispersion term  $\epsilon^2$  vanishes. Then we decompose the last equation in powers of  $\epsilon$

$$\begin{aligned} \epsilon^0 &: -S_x S_t \sqrt{u} - \rho \sqrt{u} = 0, \\ \epsilon^1 &: i \left[ S_{tx} \sqrt{u} + \frac{S_t u_x + S_x u_t}{2\sqrt{u}} \right] = 0. \end{aligned}$$

After some simple calculations, we obtain

$$\begin{cases} S_x S_t + \rho = 0, \\ S_{xt} + \frac{S_t u_x + S_x u_t}{2u} = 0, \\ u_t + 2\rho_x = 0, \end{cases}$$

where  $S_x = v$ ,  $S = \partial_x^{-1} v$ . As a result, we get the dispersionless limit of KOE in this form

$$v_t + \frac{v u_t + \gamma u_x}{2u} = 0, \quad (15)$$

$$u_t - 2(v_x \gamma + v v_t) = 0, \quad (16)$$

here  $\gamma = \partial_x^{-1} v_t$ .

#### 4.Lax representation for dispersionless limit of KOE

To construct the LR of the equations (15)-(16), we consider the LR of the KOE as

$$\Psi_{1x} = -i\lambda\Psi_1 + 0.5q\Psi_2, \tag{17}$$

$$\Psi_{2x} = -0.5\bar{q}\Psi_1 + i\lambda\Psi_2, \tag{18}$$

and

$$\Psi_{1t} = \frac{i}{4\lambda} (\rho\Psi_1 - q_t\Psi_2), \tag{19}$$

$$\Psi_{2t} = \frac{i}{4\lambda} (-\bar{q}_t\Psi_1 - \rho\Psi_2). \tag{20}$$

Here we take the function  $\Psi$  as the following exponential form

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x)}, \\ \Psi_2 &= \xi e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x-\partial_x^{-1}v)}, \end{aligned}$$

where  $\chi, \xi$  are real functions. Accordingly, their derivatives with respect to  $x$  and  $t$  are

$$\Psi_{1x} = \frac{i}{\epsilon} [\chi_x + \lambda] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x)}, \tag{21}$$

$$\Psi_{2x} = \left[ \xi_x + \frac{i}{\epsilon} (\chi_x + \lambda - v) \xi \right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x-\partial_x^{-1}v)} \tag{22}$$

and

$$\Psi_{1t} = \frac{i}{\epsilon} \chi_t e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x)}, \tag{23}$$

$$\Psi_{2t} = \left[ \xi_t + \frac{i}{\epsilon} (\chi_t - \partial_x^{-1}v_t) \xi \right] e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x-\partial_x^{-1}v)}. \tag{24}$$

Applying the scale transformation (12) we obtain the equivalent ratio of the differential systems (17)-(18), respectively

$$\epsilon\Psi_{1x} = (-i\lambda + 0.5\sqrt{u})e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x)}, \tag{25}$$

$$\epsilon\Psi_{2x} = (-0.5\sqrt{u} + i\lambda)e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x-\partial_x^{-1}v)}. \tag{26}$$

Substituting (21)-(22) in (25) and (26) we obtain

$$\chi_x + 2\lambda = -0.5i\sqrt{u}\xi. \tag{27}$$

$$\xi = -\frac{0.5\sqrt{u}}{i(\chi_x - v)}. \tag{28}$$

Considering (28) we rewrite (27)

$$\chi_x + 2\lambda - \frac{0.25u}{\chi_x - v} = 0. \tag{29}$$

At  $\chi_x = p$  the equation is reduced to the form

$$p + 2\lambda - \frac{0.25u}{p - v} = 0. \tag{30}$$

So, we obtain the spatial part of the LR. Next, we consider the second equation of LR. By transformation (13), we rewrite (19)-(20)

$$\epsilon\Psi_{1t} = \frac{i}{4\lambda} (\rho - \epsilon q) e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x)}, \tag{31}$$

$$\epsilon\Psi_{2t} = \frac{i}{4\lambda} (-\epsilon\bar{q}_t - \rho) e^{\frac{i}{\epsilon}(\chi+\lambda x-\partial_x^{-1}v)}. \tag{32}$$

Equating the expressions (23)-(24) and (31)-(32) and decomposing into different degrees of  $\epsilon$  at the limit  $\epsilon \rightarrow 0$  we obtain

$$i\chi_t = \frac{1}{4\lambda} (i\rho + \sqrt{u}\gamma\xi). \tag{33}$$

We rewrite (33) by considering (28). Then

$$\chi_t - \frac{\rho}{4\lambda} - \frac{u\gamma}{8\lambda(\chi_x - v)} = 0. \quad (34)$$

We obtain the derivative with respect to  $x$  from (34). The change of variables in  $\chi_x = p$  gives

$$p_t - \frac{\rho_x}{4\lambda} - \frac{1}{8\lambda} \left( \frac{u\gamma}{p-v} \right)_x = 0. \quad (35)$$

By the expression (30), the equation (35) takes the following form

$$p_t - \frac{\rho_x}{4\lambda} - \frac{1}{2\lambda} [(p+2\lambda)\gamma]_x = 0. \quad (36)$$

After simple transformations, the last expression can be written as

$$p_t(2p-v) - 0.5u_t + p_x\gamma = 0.$$

Thus, we obtain the LR for the system of equations (7)-(8)

$$\begin{aligned} p + 2\lambda + \frac{0.25u}{(p-v)} &= 0, \\ p_t(2p-v) - 0.5u_t + p_x\gamma &= 0. \end{aligned}$$

## 5. Conclusion

In this paper the integrability of KOE was established by constructing its Lax pair. The obtained result is used to further study of the dispersionless equations. The system of equations (7)-(8) researching us can be useful in the study of the dynamics of a current-fed string with infinite length in a magnetic field.

## References

- 1 Kakuata H., Konno K. Canonical Formulation of a Generalized Coupled Dispersionless System // Journal of Physics A: Mathematical and General, 1997.– Vol.30.– P.401-407. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/12/002>
- 2 Hassan M.J. Darboux Transformation of the Generalized Coupled Dispersionless Integrable System // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009.– Vol.42.–P.1-11.
- 3 Konno K., Oono H. New Coupled Integrable Dispersionless Equations // Journal of the Physical Society of Japan, 1994.– Vol.63.–P.377-378. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.63.377>
- 4 Kakuata H., Konno K. A. Generalization of Coupled Integrable, Dispersionless System // Journal of the Physical Society of Japan, 1996.–Vol.65.–P.340-341. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.65.340>
- 5 Bekova G., Nugmanova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K. and Myrzakulov R. Coupled Dispersionless and Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations with Self-Consistent Sources: Geometry and Equivalence // arXiv:1901.01470v3
- 6 Myrzakulova Z., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Dispersionless Limits of Integrable Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations // arXiv:1903.09195
- 7 Myrzakulova Z., Myrzakulov R. Dispersionless Limits of Some Integrable Equations // arXiv:1902.07806
- 8 Myrzakulova Z., Myrzakulov R. Dispersionless Limits of Integrable Magnetic Equations // DOI:10.13140/RG.2.2.25820.64649

## З.К. Шанина

*Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*

### Конно-Оно теңдеуінің дисперсиясыз шегі

**Аңдатпа.** Интегралданатын жүйелерді немесе шешімі бар сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді (СЕДТ) зерттеу кері шашырау әдісі ашылған сәттен бастап зерттеудің белсенді саласы болып табылады. Бұл теңдеулер кейбір мағынада әмбебап, себебі олар физика мен математиканың көптеген салаларында анықталады. Интегралданатын жүйелер деп шексіз иерархиясы бар симметрия мен сақталу заңдарын түсінеміз. Интегралданатын жүйелерді құрудың бірнеше параллель схемалары бар.

Интегралданатын СЕДТ-дан басқа, дербес туындыларда интегралданатын дифференциалдық теңдеулердің тағы бір маңызды сыныбы бар: жиі дисперсиясыз теңдеулер деп аталатын гидродинамикалық түрдегі интегралданатын теңдеулер. Олар физика мен математиканың әртүрлі есептерінде жиі пайда болады және соңғы жылдары қарқынды зерттелуде.

Бұл жұмыста интегралданатын дисперсиясыз теңдеу және оның редукциялары зерттелді. Конно-Оно теңдеуі үшін дисперсиясыз (квазиклассикалық) шек алынды және оның интегралдылығын дәлелдейтін Лакс көрінісі құрылды.

**Түйін сөздер:** Конно-Оно теңдеуі, дисперсиясыз шек, Лакс көрінісі.

**З.К. Шанина**

*Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Сұлтан, Қазақстан*

### Бездисперсионный предел уравнения Конно-Оно

**Аннотация.** Исследование интегрируемых систем или разрешимых нелинейных дифференциальных уравнений (НДУ) является активной областью исследований с момента открытия метода обратного рассеяния. Эти уравнения являются в некотором смысле универсальными, поскольку они обнаруживаются во многих областях физики и математики. Под интегрируемыми системами мы подразумеваем те, которые имеют бесконечную иерархию симметрий и законов сохранения. Для интегрируемых систем существует несколько параллельных схем построения. Помимо интегрируемых НДУ существует еще один важный класс интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных: так называемые интегрируемые уравнения гидродинамического типа, часто называемые бездисперсионными уравнениями. Они часто возникают в различных задачах физики и математики, и интенсивно изучаются в последние годы. В данной работе представлены результаты изучения связанного интегрируемого бездисперсионного уравнения и его редукции. Получен бездисперсионный (квазиклассический) предел для уравнения Конно-Оно и построено представление Лакса, доказывающее его интегрируемость.

**Ключевые слова:** уравнение Конно-Оно, бездисперсионный предел, представление Лакса.

### References

- 1 Kakhata H., Konno K. *Canonical Formulation of a Generalized Coupled Dispersionless System* Journal of Physics A: Mathematical and General, **30** 401-407 (1997) <https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/12/002>
- 2 Hassan M.J. *Darboux Transformation of the Generalized Coupled Dispersionless Integrable System* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **42** 1-11 (2009)
- 3 Konno K., Oono H. *New Coupled Integrable Dispersionless Equations* Journal of the Physical Society of Japan, **63** 377-378 (1994) <https://doi.org/10.1143/JPSJ.63.377>
- 4 Kakhata H., Konno K. A. *Generalization of Coupled Integrable, Dispersionless System* Journal of the Physical Society of Japan, **65** 340-341 (1996) <https://doi.org/10.1143/JPSJ.65.340>
- 5 Bekova G., Nugmanova G., Shaikova G., Yesmakhanova K. and Myrzakulov R. *Coupled Dispersionless and Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations with Self-Consistent Sources: Geometry and Equivalence* arXiv:1901.01470v3
- 6 Myrzakulova Z., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. *Dispersionless Limits of Integrable Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations*, arXiv:1903.09195
- 7 Myrzakulov Z., Myrzakulov R. *Dispersionless Limits of Some Integrable Equations*, arXiv:1902.07806
- 8 Myrzakulova Z., Myrzakulov R. *Dispersionless Limits of Integrable Magnetic Equations*, [DOI:10.13140/RG.2.2.25820.64649]

### Сведения об авторах:

*Шанина З.К.* - Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, "6D060400-Физика" маманығының 2 курс докторанты, Қ. Мұңайтпасов к.13, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

*Shanina Z.K.* - L.N. Gumilyov Eurasian National University, Doctoral student of the 2nd year of specialty "6D060400-Physics", K.Munaitpasov str. 13, Nur-Sultan, Kazakhstan.

*Поступила в редакцию*