

ISSN (Print) 2616-6836
ISSN (Online) 2663-1296

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

PHYSICS. ASTRONOMY Series

Серия **ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

№4(129)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019

Nur-Sultan, 2019

Нур-Султан, 2019

Бас редакторы:
ф.-м.ғ.д., профессор
А.Т. Ақылбеков (Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары

Гиниятова Ш.Г., ф.-м.ғ.к., доцент
(Қазақстан)

Редакция алқасы

Арынгазин А.Қ.	ф.-м.ғ. докторы(Қазақстан)
Алдонгаров А.А.	PhD (Қазақстан)
Балапанов М.Х.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Бахтизин Р.З.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Даулетбекова А.Қ.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Ержанов Қ.К.	ф.-м.ғ.к., PhD (Қазақстан)
Жұмаділов Қ.Ш.	PhD (Қазақстан)
Здоровец М.	ф.-м.ғ.к.(Қазақстан)
Қадыржанов Қ.К.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Кайнарбай А.Ж.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Кутербеков Қ.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Лущик А.Ч.	ф.-м.ғ.д., проф.(Эстония)
Морзабаев А.К.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Мырзақұлов Р.Қ.	ф.-м.ғ.д., проф.(Қазақстан)
Нұрахметов Т.Н.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Сауытбеков С.С.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Салиходжа Ж.М.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Тлеукенов С.К.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Усеинов А.Б.	PhD (Қазақстан)
Хоши М.	PhD, проф.(Жапония)

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтбаев к-сі, 2, 402 б.,
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Тел.: +7(7172) 709-500 (ішкі 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы.
ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

Меншіктенуші: ҚР БЖҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде 27.03.2018ж.
№16999-ж тіркеу куәлігімен тіркелген.

Ашық қолданудағы электрондық нұсқа: <http://bulphysast.enu.kz/>

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі, 12/1, 349 б.,
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті. Тел.: +7(7172)709-500 (ішкі 31-428)

Editor-in-Chief

Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor
A.T. Akilbekov (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief

Giniyatova Sh.G., Candidate of Phys.-Math. Sciences,
Assoc. Prof. (Kazakhstan)

Editorial Board

Aryngazin A.K.	Doctor of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Aldongarov A.A.	PhD (Kazakhstan)
Balapanov M.Kh.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Bakhtizin R.Z.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Dauletbekova A.K.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD (Kazakhstan)
Hoshi M.	PhD, Prof. (Japan)
Kadyrzhanov K.K.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Kainarbay A.Zh.	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Kuterbekov K.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Lushchik A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Estonia)
Morzabayev A.K.	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Myrzakulov R.K.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Nurakhmetov T.N.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Sautbekov S.S.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Salikhodzha Z. M	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Tleukenov S.K.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Useinov A.B.	PhD (Kazakhstan)
Yerzhanov K.K.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD (Kazakhstan)
Zdorovets M.	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Zhumadilov K.Sh.	PhD (Kazakhstan)

Editorial address: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2, Satpayev str., of. 402,
Nur-Sultan, Kazakhstan 010008
Tel.: +7(7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Responsible secretary, computer layout: A.Nurbolat

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.

PHYSICS. ASTRONOMY Series

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №16999-ж from 27.03.2018.

Available at: <http://bulphysast.enu.kz/>

Address of printing house: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 12/1 Kazhimukan str.,
Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;

tel.: +7(7172) 709-500 (ext. 31-428)

Главный редактор:
доктор ф.-м.н.
А.Т. Акилбеков, доктор ф.-м.н., профессор (Казахстан)

Зам. главного редактора

Ш.Г. Гиниятова к.ф.-м.н., доцент
(Казахстан)

Редакционная коллегия

Арынгазин А.К.	доктор ф.-м.н.(Казахстан)
Алдонгаров А.А.	PhD (Казахстан)
Балапанов М.Х.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Бахтизин Р.З.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Даулетбекова А.К.	д.ф.-м.н., PhD (Казахстан)
Ержанов К.К.	к.ф.-м.н., PhD (Казахстан)
Жумадилов К.Ш.	PhD (Казахстан)
Здоровец М.	к.ф.-м.н.(Казахстан)
Кадыржанов К.К.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Кайнарбай А.Ж.	к.ф.-м.н. (Казахстан)
Кутербеков К.А.	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Лущик А.Ч.	д.ф.-м.н., проф. (Эстония)
Морзабаев А.К.	д.ф.-м.н. (Казахстан)
Мырзакулов Р.К.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Нурахметов Т.Н.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Сауытбеков С.С.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Салиходжа Ж.М	к.ф.-м.н. (Казахстан)
Тлеукунов С.К.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Усеинов А.Б.	PhD (Казахстан)
Хоши М.	PhD, проф. (Япония)

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.
Тел.: (7172) 709-500 (вн. 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Ответственный секретарь, компьютерная верстка: А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

Собственник РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №16999-ж от 27.03.2018г.

Электронная версия в открытом доступе: <http://bulphysast.enu.kz/>

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажимукана, 12/1, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева. тел.: +7(7172)709-500 (вн. 31-428)

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

№4(129)/2019

МАЗМҰНЫ

<i>Ибраева А.Д., Янсе А. Вуурен Ван, Скуратов В.А., Здоровец М.В.</i> Кристалды Si ₃ N ₄ -те латентті тректердің пайда болу энергиясының ионизациялық жоғалтуының шекті деңгейін анықтау	8
<i>Алдонгаров А.А., Асылбекова А.М., Иргибаетова И.С.</i> Кумарин бояғышымен байланысты CdS кластерлерінде электрондық ауысуларды есептеу	15
<i>Ермекова Ж.К., Алдонгаров А.А., Сағындықова Ғ.Е., Есманова С.С.</i> Педагогикалық мамандық студенттерінің сыни ойлауын дамыту	27
<i>Карипбаев Ж.Т., Абуова А.У., Алтысова Г.К., Сәрсенғалиева К.М., Байжолов К.А., Кукенова А.Б., Здоровец М.В.</i> Оттегі енгізілген ZnWO ₄ кристалдарының люминесценциясы	33
<i>Кабышев А.М., Кутербеков К.А., Мұхамбетжан А.М., Нуржанов А.Б., Уәлшерев Д.Т., Бекмырза К.Ж., Рахимғалиева И.Т., Сарсенов Р.М., Махамбаева И.У.</i> 8-217 МэВ энергиясы кезінде ²⁸ Si ядросында ³ He серпімді шашырауын зерттеу	42
<i>Мусаханов Д.А., Лисицын В.М., Карипбаев Ж.Т., Алтысова Г.К., Голковский М.Г., Даулетбекова А.К., Козловский А., Здоровец М.В.</i> Қуатты электронды ағынында синтезделген MgF ₂ -WO ₂ керамикасының құрылымы	51
<i>Каргин Д., Козловский А., Алтынов Е., Касымханов, А.Бисекен, Мухамбетов Д.</i> Болат илемдеу өндірісінің қосалқы өнімдер бөлшектерінің морфологиясы	59
<i>Мусатаева А.Б., Мырзакулов Н.А.</i> Камасс-Холм теңдеуі үшін беттің бірінші және екінші фундаменталды формасы	65
<i>Серикбаев Н.С., Нугманова Г.Н., Мырзакулов Р.</i> (2+1)-өлшемді Дэви-Стюартсон I теңдеуінің екікомпонентті жалпылануы I	73
<i>Ногай А.С., Кутербеков К.А., Ускенбаев Д.Е., Бекмырза К.Ж., Ногай А.А., Кабышев А.М.</i> Платинасыз катализаторлары бар нафион типті мембраналардағы жылу релаксациялық поляризациясының ерекшеліктері	80
<i>Нурсултанова Н.С., Жумадилов К.Ш.</i> Төмен доза әсер ету ықпалын бағалау мәселесі	86
<i>Шанина З.К.</i> Конно-Оно теңдеуінің дисперсиясыз шегі	93
<i>Шаханова Г.А.</i> Ақыл-ой карталарын оқу үдерісінде идеяларды қалыптастыру және құрылымдау әдісі ретінде қолдану	99
<i>Русақова А.В., Акилбеков А.Т., Жунусова М.К.</i> Нейтрондармен сәулеленген GaAs диэлектрлік қасиеттерін күйдіру	107

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. PHYSICS.
ASTRONOMY SERIES

№4(129)/2019

CONTENTS

<i>Ibrayeva A.D., Janse A. Vuuren Van, Skuratov V.A., Zdorovets M.V.</i> About determination of the threshold ionization energy losses for the latent tracks formation in crystalline Si_3N_4	8
<i>Aldongarov A.A., Assilbekova A.M., Irgibaeva I.S.</i> Calculation of electronic transitions in CdS clusters associated with coumarin dye	15
<i>Ermekova Zh.K., Aldongarov A.A., Sagyndykova G.E., Esmanova S.S.</i> Development of critical thinking of students of pedagogical specialties	27
<i>Karipbaev Zh.T., Abuova A.U. Alpyssova G.K., Sarsengalieva K.M., Baozholov K.A., Kukenova A.B., Zdorovets M.V.</i> Luminescence of ZnWO_4 crystals with oxygen introduced	33
<i>Kabyshv A.M., Kuterbekov K.A., Mukhambetzhana A.M., Nurzhanov A.B., Ualsherov D.T., Bekmyrza K.Zh., Rakhimgaliyeva I.T., Sarsenov R.M., Makhambayeva .U.</i> Study of the elastic scattering of ^3He on the ^{28}Si nucleus at the energy of 8 -217 MeV	42
<i>Musahanov D., Lisitsyn V., Karipbaev Zh., Alpyssova G., Golkovskii M., Dauletbekova A., Kozlovskii A., Zdorovec M.</i> The structure of $\text{MgF}_2\text{-WO}_2$ ceramic synthesized in a powerful electron flow	51
<i>Kargin D., Kozlovskij A., Altynov E., Kasymhanov Zh., Biseken A., Muhambetov D.</i> Morphology of the particles of by-products of steel rolling production	59
<i>Mussatayeva A.B., Myrzakulov N.A.</i> The first and second fundamental forms for the Camassa-Holm equation	65
<i>Serikbayev N.S., Nugmanova G.N., Myrzakulov R.</i> On the Integrable Two-Component (2+1)-dimensional Davey-Stewartson Equation	73
<i>Nogay A.S., Kuterbekov K.A., Uskenbayev D.E., Bekmyrza K.Zh., Nogay A.A., Kabyshv A.M.</i> Features of thermal relaxation of polarization in the Nafion membranes with no platinum catalysts	80
<i>Nursultanova N., Zhumadilov K.</i> The problem of assessing the effects of low-dose exposure	86
<i>Shanina Z.K.</i> Dispersionless limit of the Konno-Oono equation	93
<i>Shakhanova G.A.</i> Mind maps as a method of generating and structuring ideas in the learning process	99
<i>Russakova A.V., Akilbekov A.T., Zhunusova M.K.</i> Annealing of dielectric properties of GaAs Crystals Irradiated by Neutrons	107

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

№4(129)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ибраева А.Д., Янсе А. Вуурен Ван., Скуратов В.А., Здоровец М.В.</i> К вопросу об определении порогового уровня ионизационных потерь энергии образования латентных треков в кристаллическом Si_3N_4	8
<i>Алдонгаров А.А., Асылбекова А.М., Иргибаетова И.С.</i> Расчет электронных переходов в кластерах CdS, связанных с кумариновым красителем	15
<i>Ермекова Ж.К., Алдонгаров А.А., Сагындыкова Г.Е., Есманова С.С.</i> Развитие критического мышления студентов педагогических специальностей	27
<i>Карипбаев Ж.Т., Абуова А.У., Алтысова Г.К., Сарсенгалиева К.М., Байжолов К.А., Кукенова А.Б., Здоровец М.В.</i> Люминесценция кристаллов ZnWO_4 с введенным кислородом	33
<i>Кабышев А.М., Кутербекоев К.А., Мухамбетжан А.М., Нуржанов А.Б., Уалшерев Д.Т., Бекмырза К.Ж., Рахимгалиева И.Т., Сарсенов Р.М., Махамбаева И.У.</i> Изучение упругого рассеяния ^3He на ядре ^{28}Si при энергии 8-217 МэВ	42
<i>Мусаханов Д.А., Лисицын В.М., Карипбаев Ж.Т., Алтысова Г.К., Голковский М.Г., Даулетбекова А.К., Козловский А., Здоровец М.В.</i> Структура керамики $\text{MgF}_2\text{-WO}_2$, синтезированной в мощном потоке электронов	51
<i>Каргин Д., Козловский А., Алтынов Е., Касымханов, А.Бисекен, Д.Мухамбетов</i> Морфология частиц побочных продуктов сталепрокатного производства	59
<i>Мусатаева А.Б., Мырзакулов Н.А.</i> Первая и вторая фундаментальные формы поверхности для уравнения Камасса-Холма	65
<i>Серикбаев Н.С., Нугманова Г.Н., Мырзакулов Р.</i> О двухкомпонентном обобщении (2+1)-мерного уравнения Дэви-Стюартсона I	73
<i>Ногай А.С., Кутербекоев К.А., Ускенбаев Д.Е., Бекмырза К.Ж., Ногай А.А., Кабышев А.М.</i> Особенности тепловой релаксационной поляризации в мембранах типа нафион с без платиновыми катализаторами	80
<i>Нурсултанова Н.С., Жумадилов К.Ш.</i> Проблема оценки последствий воздействия низкой дозы облучения	86
<i>Шанина З.К.</i> Бездисперсионный предел уравнения Конно-Оно	93
<i>Шаханова Г.А.</i> Интеллект-карты как метод генерации и структурирования идей в учебном процессе	99
<i>Русакова А.В., Акилбеков А.Т., Жунусова М.К.</i> Отжиг диэлектрических свойств GaAs, компенсированного облучением нейтронами	107

Н.С. Серикбаев¹, Г.Н. Нугманова², Р. Мырзакулов³

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.
(E-mail: ¹ ns.serikbayev@gmail.com, ² nugmanovagn@gmail.com, ³ rmyrzakulov@gmail.com)

О двухкомпонентном обобщении (2+1)-мерного уравнения Дэви-Стюартсона I

Аннотация: Калибровочно-геометрическим эквивалентом знаменитого спинового уравнения Ишимори является (2+1)-мерное уравнение Дэви-Стюартсона, которое в свою очередь является одним из (2+1)-мерных обобщений нелинейного уравнения Шредингера. Многокомпонентное обобщение нелинейных интегрируемых уравнений привлекают значительный интерес как с физической, так и с математической точки зрения. В данной работе, исходя из однокомпонентного (2+1)-мерного уравнения Дэви-Стюартсона I, получено его двухкомпонентное интегрируемое обобщение и соответствующее представление Лакса.

Ключевые слова: интегрируемые системы, представление Лакса, уравнение Дэви-Стюартсона.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-6836-2019-129-4-73-79>

Введение. Известно, что класс интегрируемых нелинейных уравнений типа Шредингера (НУШ) является ключевой моделью в теории интегрируемых уравнений. В последнее время активно исследуются их многокомпонентные обобщения. В работе [1] показано, что двухкомпонентная система Манакова интегрируема. Геометрическая связь с последней системой и двухслойной спиновой моделью установлена в работах [2]–[4]. Калибровочно-геометрически эквивалент спинового уравнения Ишимори [5] есть (2+1)-мерное уравнение Дэви-Стюартсона (ДС), которое является одним из (2+1)-мерных обобщений НУШ [6].

Рассмотрим (2+1)-мерное уравнение ДС

$$iq_t + \frac{1}{2}(\sigma^2 q_{xx} + q_{yy}) = (v - qr)q, \quad (1a)$$

$$-ir_t + \frac{1}{2}(\sigma^2 r_{xx} + r_{yy}) = (v - qr)r, \quad (1b)$$

$$v_{xx} - \sigma^2 v_{yy} = 2(qr)_{xx}, \quad (1c)$$

где $r = \pm q^*$, q^* является комплексным сопряжением q . При $\sigma^2 = 1$ система уравнений (1) называется уравнением Дэви-Стюартсона I типа (ДСI), а при $\sigma^2 = -1$ - уравнением Дэви-Стюартсона II типа (ДСII) [7]. Далее мы сосредоточимся на (2+1)-мерном уравнении ДСИ, и в следующем пункте приведем некоторые известные данные об однокомпонентном (2+1)-мерном уравнении ДСИ. Наша цель – вывести двухкомпонентное обобщение для уравнения ДСИ. Результат исследования формируется в виде утверждения и строго доказывается во втором пункте.

1. Однокомпонентное (2+1)-мерное уравнение ДСИ

Стандартное представление Лакса уравнения ДСИ имеет вид [8]

$$F_y = \sigma_3 F_x + QF, \quad (2a)$$

$$F_t = A_2 F_{xx} + A_1 F_x + A_0 F, \quad (2b)$$

где

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = i \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad A_1 = 2i \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = 2i\sigma_3.$$

Элементы матрицы A_0 удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_y)q, \\ c_{21} &= -\frac{1}{2}(\partial_x - \partial_y)r, \\ (\partial_x - \partial_y)c_{11} &= -\frac{1}{2}(\partial_x + \partial_y)(qr), \\ (\partial_x + \partial_y)c_{22} &= \frac{1}{2}(\partial_x - \partial_y)(qr), \end{aligned}$$

здесь $\partial_x \equiv \partial/\partial x$, $\partial_y \equiv \partial/\partial y$, а поле v в системе уравнений ДС (1) определяется как

$$v = -i(c_{22} - c_{11}) + qr.$$

Из условия совместности уравнения (2a) и (2b) $F_{yt} = F_{ty}$ вытекает следующий ряд уравнений:

$$[\sigma_3, A_2] = 0, \tag{3a}$$

$$\sigma_3 A_{2x} - A_{2y} + [\sigma_3, A_1] + [Q, A_2] = 0, \tag{3b}$$

$$\sigma_3 A_{1x} - A_{1y} + [\sigma_3, A_0] + [Q, A_1] - 2A_2 Q_x = 0, \tag{3c}$$

$$\sigma_3 A_{0x} - A_{0y} + Q_t + [Q, A_0] - A_2 Q_{xx} - A_1 Q_x = 0. \tag{3d}$$

Из системы уравнений (3a)–(3d) не сложно получить однокомпонентное (2+1)-мерное уравнение ДСИ [8].

2. Двухкомпонентное (2+1)-мерное уравнение ДСИ

Теорема 1. Если матрицы Σ , Q и A принадлежат группе $SU(3)$, то двухкомпонентное (2+1)-мерное уравнение ДСИ имеет следующий вид:

$$iq_{1t} + q_{1xx} + q_{1yy} - v_1 q_1 - w_1 q_2 = 0, \tag{4a}$$

$$iq_{2t} + q_{2xx} + q_{2yy} - w_2 q_1 - v_2 q_2 = 0, \tag{4b}$$

$$-ir_{1t} + r_{1xx} + r_{1yy} - v_1 r_1 - w_1 r_2 = 0, \tag{4c}$$

$$-ir_{2t} + r_{2xx} + r_{2yy} - w_2 r_1 - v_2 r_2 = 0, \tag{4d}$$

$$v_{1xx} - v_{1yy} = (2r_1 q_1 + r_2 q_2)_{xx} + 2(r_2 q_2)_{xy} + (2r_1 q_1 + r_2 q_2)_{yy}, \tag{4e}$$

$$v_{2xx} - v_{2yy} = (r_1 q_1 + 2r_2 q_2)_{xx} + 2(r_1 q_1)_{xy} + (r_1 q_1 + 2r_2 q_2)_{yy}, \tag{4f}$$

$$w_{1xx} - w_{1yy} = (q_1 r_2)_{xx} - 2(q_1 r_2)_{xy} + (q_1 r_2)_{yy}, \tag{4g}$$

$$w_{2xx} - w_{2yy} = (q_2 r_1)_{xx} - 2(q_2 r_1)_{xy} + (q_2 r_1)_{yy}, \tag{4h}$$

где q и r - комплексно-значные функции, а v_j и w_j - реальные функции.

Доказательство. Для доказательства потребуем, чтобы матрица-столбец F удовлетворяла представлению Лакса

$$F_y = \Sigma F_x + P F, \tag{5a}$$

$$F_t = B_2 F_{xx} + B_1 F_x + B_0 F, \tag{5b}$$

здесь

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

остальные матрицы принадлежат алгебре $su(3)$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда из условия совместности $F_{yt} = F_{ty}$ системы (5а) и (5б) получаем

$$[\Sigma, B_2] = 0, \quad (6a)$$

$$\Sigma B_{2x} - B_{2y} + [\Sigma, B_1] + [P, B_2] = 0, \quad (6b)$$

$$\Sigma B_{1x} - B_{1y} + [\Sigma, B_0] + [P, B_1] - 2B_2 P_x = 0, \quad (6c)$$

$$\Sigma B_{0x} - B_{0y} + P_t + [P, B_0] - B_2 P_{xx} - B_1 P_x = 0. \quad (6d)$$

Теперь определим элементы матриц B_0 , B_1 и B_2 . Из уравнения (6а) определяется, что

$$a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0.$$

Следовательно, имеем

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, из уравнений (6b) и (6c) получим ряд ограничений для элементов матриц B_0 , B_1 и B_2 . А именно для элементов a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) матрицы B_2 :

$$a_{11x} + a_{11y} = 0,$$

$$a_{22x} + a_{22y} = 0,$$

$$a_{33x} + a_{33y} = 0,$$

$$a_{23x} + a_{23y} = 0,$$

$$a_{32x} + a_{32y} = 0.$$

Для элементов b_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) матрицы B_1 :

$$b_{12} = -\frac{1}{2}(a_{2211}q_1 + a_{32}q_2),$$

$$b_{21} = \frac{1}{2}(a_{2211}r_1 + a_{23}r_2),$$

$$b_{13} = -\frac{1}{2}(a_{3311}q_2 + a_{23}q_1),$$

$$b_{31} = \frac{1}{2}(a_{3311}r_2 + a_{32}r_1),$$

$$b_{11x} - b_{11y} = 0,$$

$$b_{22x} + b_{22y} = -\frac{1}{2}(a_{23}q_1r_2 - a_{32}q_2r_1),$$

$$b_{33x} + b_{33y} = \frac{1}{2}(a_{23}q_1r_2 - a_{32}q_2r_1),$$

$$b_{23x} + b_{23y} = \frac{1}{2}(a_{3322}q_2r_1 + a_{23}(q_1r_1 - q_2r_2)),$$

$$b_{32x} + b_{32y} = -\frac{1}{2}(a_{3322}q_1r_2 + a_{32}(q_1r_1 - q_2r_2)),$$

где $a_{iijj} = a_{ii} - a_{jj}$ ($i > j$).

И для элементов c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) матрицы B_0 имеем

$$c_{12} = \frac{1}{4}[(3a_{11} + a_{22})q_{1x} - a_{2211}q_{1y} + a_{32}q_{2x} - a_{32}q_{2y} + (a_{22x} - a_{22y} - 2b_{2211})q_1 + (a_{32x} - a_{32y} - 2b_{32})q_2],$$

$$c_{21} = \frac{1}{4}[(3a_{11} + a_{22})r_{1x} - a_{2211}r_{1y} + 3a_{32}r_{2x} - a_{23}r_{2y} + (a_{11x} + a_{11y} + 2b_{2211})r_1 + 2b_{23}r_2],$$

$$c_{13} = \frac{1}{4}[a_{23}q_{1x} - a_{23}q_{1y} + (3a_{11} + a_{33})q_{2x} - a_{3311}q_{2y} + (a_{23x} - a_{23y} - 2b_{32})q_1 + (a_{33x} - a_{33y} - 2b_{3311})q_2],$$

$$c_{31} = \frac{1}{4}[3a_{32}r_{1x} - a_{32}r_{1y} + (a_{11} + 3a_{33})r_{2x} - a_{3311}r_{2y} + 2b_{32}r_1 + (a_{11x} + a_{11y} + 2b_{3311})r_2].$$

Из уравнения (6d) получим следующую систему уравнений:

$$q_{1t} = a_{11}q_{1xx} + b_{11}q_{1x} - c_{12x} + c_{12y} - c_{2211}q_1 - c_{32}q_2, \quad (7a)$$

$$q_{2t} = a_{11}q_{2xx} + b_{11}q_{2x} - c_{13x} + c_{13y} - c_{3311}q_2 - c_{23}q_1, \quad (7b)$$

$$r_{1t} = a_{22}r_{1xx} + a_{23}r_{2xx} + b_{22}r_{1x} + b_{23}r_{2x} - c_{21x} - c_{21y} + c_{2211}r_1 + c_{23}r_2, \quad (7c)$$

$$r_{2t} = a_{32}r_{1xx} + a_{33}r_{2xx} + b_{32}r_{1x} + b_{33}r_{2x} - c_{31x} - c_{21y} + c_{3311}r_2 + c_{32}r_1, \quad (7d)$$

$$c_{11x} + c_{21}q_1 + c_{31}q_2 + c_{12}r_1 + c_{13}r_2 + b_{12}r_{1x} + b_{13}r_{2x} - c_{11y} = 0, \quad (7e)$$

$$-c_{22x} - c_{12}r_1 - c_{21}q_1 - b_{21}q_{1x} - c_{22y} = 0, \quad (7f)$$

$$-c_{23x} - c_{13}r_1 - c_{21}q_2 - b_{21}q_{2x} - c_{23y} = 0, \quad (7g)$$

$$-c_{32x} - c_{12}r_2 - c_{31}q_1 - b_{31}q_{1x} - c_{32y} = 0, \quad (7h)$$

$$-c_{33x} - c_{13}r_2 - c_{31}q_2 - b_{31}q_{2x} - c_{33y} = 0. \quad (7i)$$

Далее, учитывая полученные выше результаты, уравнение (7a) перепишем в виде

$$iq_{1t} + \frac{i}{4}a_{2211}q_{1xx} + \frac{i}{4}a_{2211}q_{1yy} + \frac{i}{4}a_{32}q_{2xx} + \frac{i}{4}a_{32}q_{2yy} + \frac{i}{2}(-a_{22} - a_{11})q_{1xy} -$$

$$-\frac{i}{2}a_{32}q_{2xy} + \frac{i}{2}(a_{32x} - a_{32y} - b_{32})q_{2x} + \frac{i}{2}(-a_{32x} + a_{32y} + b_{32})q_{2y} +$$

$$+\frac{i}{2}(a_{22x} - a_{22y} - b_{22} - b_{11})q_{1x} + \frac{i}{2}(a_{22x} + a_{22y} + b_{22} - b_{11})q_{1y} +$$

$$+\frac{i}{4}[a_{22xx} - 2a_{22xy} + a_{22yy} - 2(b_{22x} - b_{22y}) + 4c_{2211}]q_1 +$$

$$+\frac{i}{4}[a_{32xx} - 2a_{32xy} + a_{32y} - 2(b_{32x} - b_{32y}) + 4c_{32}]q_2 = 0. \quad (8)$$

Полагая, что коэффициенты при вторых производных от q_1 по x и y в уравнении (8) равны единице: $\frac{i}{4}a_{2211} = 1$, получаем $a_{2211} = a_{22} - a_{11} = -4i$. Без потери общности берем $a_{11} = 2i$ и $a_{22} = -2i$.

Аналогично рассмотрим уравнение (7b). Получим, что

$$iq_{2t} + \frac{i}{4}a_{3311}q_{2xx} + \frac{i}{4}a_{3311}q_{2yy} + \frac{i}{4}a_{23}q_{1xx} + \frac{i}{4}a_{23}q_{1yy} + \frac{i}{2}(-a_{33} - a_{11})q_{2xy} -$$

$$-\frac{i}{2}a_{23}q_{1xy} + \frac{i}{2}(a_{23x} - a_{23y} - b_{32})q_{1x} + \frac{i}{2}(-a_{23x} + a_{23y} + b_{32})q_{1y} +$$

$$+\frac{i}{2}(a_{33x} - a_{33y} - b_{33} - b_{11})q_{2x} + \frac{i}{2}(a_{33x} + a_{33y} + b_{33} - b_{11})q_{2y} +$$

$$+\frac{i}{4}[a_{33xx} - 2a_{33xy} + a_{33yy} - 2(b_{33x} - b_{33y}) + 4c_{3311}]q_2 +$$

$$+\frac{i}{4}[a_{23xx} - 2a_{23xy} + a_{23y} - 2(b_{23x} - b_{23y}) + 4c_{23}]q_1 = 0. \quad (9)$$

В случае $\frac{i}{4}a_{3311} = 1$ в уравнении (9), можно определить, что $a_{33} = -2i$. С учетом выше полученных выше результатов матрица B_2 принимает вид:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & a_{23} \\ 0 & a_{32} & -2i \end{pmatrix} = 2i\Sigma + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае $a_{23} = a_{32} = 0$ матрица B_2 примет вид

$$B_2 = 2i\Sigma.$$

Теперь ревизируем все уравнения, полученные из (6a)–(6d) для элементов b_{ij} и c_{ij} . Имеем

$$\begin{aligned} b_{12} &= 2iq_1, \\ b_{13} &= 2iq_2, \\ b_{21} &= -2ir_1, \\ b_{31} &= -2ir_2, \\ b_{11x} - b_{11y} &= 0, \\ b_{22x} + b_{22y} &= 0, \\ b_{33x} + b_{33y} &= 0, \\ b_{23x} + b_{23y} &= 0, \\ b_{32x} + b_{32y} &= 0. \end{aligned}$$

Последние пять уравнений имеют решение

$$b_{11} = b_{22} = b_{23} = b_{32} = b_{33} = 0.$$

Таким образом, для элементов матрицы B_1 получим

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2iq_1 & 2iq_2 \\ -2ir_1 & 0 & 0 \\ -2ir_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2iP.$$

Аналогично определим выражения для элементов c_{ij} матрицы B_0 в виде

$$\begin{aligned} c_{12} &= i(q_{1x} + q_{1y}), \\ c_{13} &= i(q_{2x} + q_{2y}), \\ c_{21} &= -i(r_{1x} - r_{1y}), \\ c_{31} &= -i(r_{2x} - r_{2y}). \end{aligned}$$

Оставшиеся пять элементов, c_{11} , c_{22} , c_{33} , c_{23} , c_{32} , удовлетворяют следующим нетривиальным уравнениям:

$$c_{11x} - c_{11y} = -i(r_1q_1 + r_2q_2)_x - i(r_1q_1 + r_2q_2)_y, \quad (10a)$$

$$c_{22x} + c_{22y} = i(r_1q_1)_x - i(r_1q_1)_y, \quad (10b)$$

$$c_{33x} + c_{33y} = i(r_2q_2)_x - i(r_2q_2)_y, \quad (10c)$$

$$c_{23x} + c_{23y} = i(r_1q_2)_x - i(r_1q_2)_y, \quad (10d)$$

$$c_{32x} + c_{32y} = i(r_2q_1)_x - i(q_1r_2)_y. \quad (10e)$$

Введем обозначения: $v_1 = -ic_{2211}$, $v_2 = -ic_{3311}$, $w_1 = -ic_{32}$ и $w_2 = -ic_{23}$. Подействуя на v_1 операторами $D^+ = \partial_x + \partial_y$ и $D^- = \partial_x - \partial_y$, получим

$$D^- D^+ (-ic_{22}) = -i(c_{22xx} - c_{22yy}),$$

$$D^+ D^- (-ic_{22}) = (r_1q_1)_{xx} - (r_1q_1)_{yx} - (r_1q_1)_{xy} + i(r_1q_1)_{yy} = (r_1q_1)_{xx} - 2(r_1q_1)_{xy} + i(r_1q_1)_{yy},$$

$$D^+ D^- v_1 = (2r_1q_1 + r_2q_2)_{xx} + 2(r_2q_2)_{xy} + (2r_1q_1 + r_2q_2)_{yy}.$$

В итоге имеем

$$v_{1xx} - v_{1yy} = (2r_1q_1 + r_2q_2)_{xx} + 2(r_2q_2)_{xy} + (2r_1q_1 + r_2q_2)_{yy},$$

которое в свою очередь является уравнением (4e).

Аналогичным образом, действуя операторами D^+ и D^- на v_2 , w_1 и w_2 , получаем следующие уравнения, соответственно:

$$v_{2xx} - v_{2yy} = (r_1q_1 + 2r_2q_2)_{xx} + 2(r_1q_1)_{xy} + (r_1q_1 + 2r_2q_2)_{yy},$$

$$w_{1xx} - w_{1yy} = (q_1r_2)_{xx} - 2(q_1r_2)_{xy} + (q_1r_2)_{yy},$$

$$w_{2xx} - w_{2yy} = (q_2 r_1)_{xx} - 2(q_2 r_1)_{xy} + (q_2 r_1)_{yy}.$$

Как мы видим, полученные последние три уравнения оказались теми же уравнениями (4f)-(4h). Далее, используя выше введенные обозначения (10), напомним для q_{1t} , q_{2t} , r_{1t} и r_{2t} уравнения в виде

$$\begin{aligned} i q_{1t} + q_{1xx} + q_{1yy} - v_1 q_1 - w_1 q_2 &= 0, \\ i q_{2t} + q_{2xx} + q_{2yy} - w_2 q_1 - v_2 q_2 &= 0, \\ -i r_{1t} + r_{1xx} + r_{1yy} - v_1 r_1 - w_1 r_2 &= 0, \\ -i r_{2t} + r_{2xx} + r_{2yy} - w_2 r_1 - v_2 r_2 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом мы получили систему уравнений (4), что требовалось доказать.

Заключение. В завершение отметим, что двухкомпонентное обобщение уравнения ДСИ (4) и его представление Лакса (5) получено впервые. Детальное изучение алгебро-геометрических свойств системы (4) является предметом наших дальнейших исследований.

Список литературы

- 1 Kostov N., Dandoloff R., Gerdjikov V., Grahovski G. The Manakov System as Two Moving Interacting Curves // Proceedings of the International Workshop "Complex structures and vector fields", Sofia, Bulgaria, 2006. – Sofia, 2007. – P. 168-179.
- 2 Myrzakul A. and Myrzakulov R. Darboux transformations и exact soliton solutions of integrable coupled spin systems related with the Manakov system. [arXiv:1607.08151].
- 3 Myrzakul A. and Myrzakulov R. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrodinger equation, [arXiv:1608.08553].
- 4 Nugmanova G., Myrzakul A. Integrability of the two-layer spin system // Proceedings of 20-th International Conference "Geometry, Integrability and Quantization", Varna, Yoshioka, 2018. –Varna, 2018. – P. 88-90.
- 5 Ishimori Y. Multi-Vortex solutions of the a two-dimensional nonlinear wave equation // Prog. Theor. Phys. –1984. – Vol. 72, N1. – P. 33-37.
- 6 Davey A., Stewartson K. On three-dimensional packets of surface waves // Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1974. – London, – Vol. 338. – P. 101-110.
- 7 Ablowitz M. A., Clarkson P. A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering / London Mathematical Society Lecture Note Series Book, 149, 2003. -516 p.
- 8 Zhou Z., Ma W X., Zhou R. Finite-dimensional integrable systems associated with Davey-Stewartson I equation // Nonlinearity. –2001, – Vol. 14. – P. 701–717.

Н.С. Серікбаев, Г.Н. Нұғманова, Р. Мырзақұлов

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіні, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
(2+1)-өлшемді Дэви-Стюартсон I теңдеуінің екікомпонентті жалпылануы

Аңдатпа Танымал Ишимори спин теңдеуіне калибрлі-геометрикалық балама болып сызықты емес (2+1)-өлшемді Дэви-Стюартсон теңдеуі табылады, ол өз кезегінде жалпыланған (2+1)- өлшемді Шредингер теңдеуінің бірі. Сызықты емес интегралданатын теңдеулердің көп компонентті жалпылануы физикалық және математикалық көзқарастан үлкен қызығушылық тудырады. Мақалада бір компонентті (2+1)-өлшемді Дэви-Стюартсон I теңдеуіне негізделіп, оның екі компонентті интегралданатын жалпылама және сәйкес Лакс тұжырымы алынған.

Түйін сөздер: интегралданатын жүйелер, Лакс көрінісі, Дэви-Стюартсон теңдеуі.

N.S. Serikbayev, G.N. Nugmanova, R. Myrzakulov

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

On the Integrable Two-Component (2+1)-dimensional Davey-Stewartson Equation I

Abstract The geometric-gauge equivalent of the famous Ishimori spin equation is the (2+1)-dimensional Davy-Stewartson equation, which in turn is one of the (2+1)-dimensional generalizations of the nonlinear Schrodinger equation. Multicomponent generalization of nonlinear integrable equations attract considerable interest from both physical and mathematical points of view. In this paper, the two-component integrable generalization of the (2+1)-dimensional Davy-Stewartson I equation is obtained based on its one-component representation, and the corresponding Lax representation is also obtained.

Keywords: Integrable systems, Lax representation, Davey-Stewartson equation.

References

- 1 Kostov N., Dandoloff R., Gerdjikov V., Grahovski G. The Manakov System as Two Moving Interacting Curves, Proceedings of the International Workshop "Complex structures and vector fields", Sofia, Bulgaria, 2007, 168-179 (2007).

- 2 Myrzakul A. and Myrzakulov R.. Darboux transformations и exact soliton solutions of integrable coupled spin systems related with the Manakov system. [arXiv:1607.08151].
- 3 Myrzakul A. and Myrzakulov R.. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrodinger equation, [arXiv:1608.08553].
- 4 Nugmanova G., Myrzakul A. Integrability of the two-layer spin system, Proceedings of 20-th International Conference "Geometry, Integrability and Quantization", Varna, Yoshioka, Varna, 88-90 (2018).
- 5 Ishimori Y. Multi-Vortex solutions of the a two-dimensional nonlinear wave equation, Prog. Theor. Phys., 72, N1, 33-37 (1984).
- 6 Davey A., Stewartson K. On three-dimensional packets of surface waves, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 338, 101-110 (1974).
- 7 Ablowitz M. A., Clarkson P. A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, London Mathematical Society Lecture Note Series Book, 149, 516p (2003).
- 8 Zhou Z., Ma W X., Zhou R. Finite-dimensional integrable systems associated with Davey-Stewartson I equation, Nonlinearity, 14, 701-717(2001).

Сведения об авторах:

Серикбаев Н.С. - PhD, и.о. доцента кафедры "Общая и теоретическая физика", Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Нур-Султан, Казахстан.

Нугманова Г.Н. - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры "Математическое и компьютерное моделирование", Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Нур-Султан, Казахстан.

Мырзакулов Р. - доктор физико-математических наук, директор Евразийского международного центра теоретической физики, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Нур-Султан, Казахстан.

Serikbayev N.S. - PhD, Acting Associate Professor of the Department "General and Theoretical Physics", L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str. 2, Nur-Sultan, Kazakhstan. Kazakhstan.

Nugmanova G.N. - Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department "Mathematical and Computer Modeling", L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str. 2, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Myrzakulov R. - Doctor of physical and mathematical sciences, Director "Eurasian International Center for Theoretical Physics", L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str. 2, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 29.09.2019