

ISSN (Print) 2616-6836
ISSN (Online) 2663-1296

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

PHYSICS. ASTRONOMY Series

Серия **ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

№2(127)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019

Nur-Sultan, 2019

Нур-Султан, 2019

Бас редакторы:
ф.-м.ғ. докторы
А.Қ. Арынгазин (Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары

А.Т. Ақылбеков, ф.-м.ғ.д., профессор
(Қазақстан)

Редакция алқасы

Алдонгаров А.А.	PhD (Қазақстан)
Балапанов М.Х.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Бахтизин Р.З.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Гиниятова Ш.Г.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Даулетбекова А.Қ.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Ержанов Қ.К.	ф.-м.ғ.к., PhD (Қазақстан)
Жұмаділов Қ.Ш.	PhD (Қазақстан)
Здоровец М.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Қадыржанов Қ.К.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Кайнарбай А.Ж.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Кутербеков Қ.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Лущик А.Ч.	ф.-м.ғ.д., проф. (Эстония)
Морзабаев А.К.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Мырзақұлов Р.Қ.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Нұрахметов Т.Н.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Сауытбеков С.С.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Салиходжа Ж.М.	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
Тлеукенов С.К.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Усеинов А.Б.	PhD (Қазақстан)
Хоши М.	PhD, проф. (Жапония)

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтбаев к-сі, 2, 349 б., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Тел.: +7(7172) 709-500 (ішкі 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы.
ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

Меншіктенуші: ҚР БЖҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде 27.03.2018ж.
№16999-ж тіркеу куәлігімен тіркелген.

Тиражы: 25 дана

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі, 12/1, 349 б.,
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті. Тел.: +7(7172)709-500 (ішкі 31-428)

Editor-in-Chief
Doctor of Phys.-Math. Sciences
A.K. Aryngazin (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief

A.T. Akilbekov, Doctor of Phys.-Math. Sciences,
Prof. (Kazakhstan)

Editorial Board

Aldongarov A.A.	PhD (Kazakhstan)
Balapanov M.Kh.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Bakhtizin R.Z.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Dauletbekova A.K.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD (Kazakhstan)
Giniyatova Sh.G.	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Hoshi M.	PhD, Prof. (Japan)
Kadyrzhanov K.K.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Kainarbay A.Zh.	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Kuterbekov K.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Lushchik A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Estonia)
Morzabayev A.K.	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Myrzakulov R.K.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Nurakhmetov T.N.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Sautbekov S.S.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Salikhodzha Z. M	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Tleukenov S.K.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Useinov A.B.	PhD (Kazakhstan)
Yerzhanov K.K.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD(Kazakhstan)
Zdorovets M.	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
Zhumadilov K.Sh.	PhD (Kazakhstan)

Editorial address: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2, Satpayev str., of. 349,
Nur-Sultan, Kazakhstan 010008
Tel.: +7(7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Responsible secretary, computer layout: A.Nurbolat

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.

PHYSICS. ASTRONOMY Series

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №16999-ж from 27.03.2018.

Circulation: 25 copies

Address of printing house: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 12/1 Kazhimukan str.,
Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;

tel.:+7(7172) 709-500 (ext. 31-428)

Главный редактор:
доктор ф.-м.н.
А.К. Арынгазин (Казахстан)

Зам. главного редактора

А.Т. Акилбеков, доктор ф.-м.н.,
профессор (Казахстан)

Редакционная коллегия

Алдонгаров А.А.	PhD (Казахстан)
Балапанов М.Х.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Бахтизин Р.З.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Гиниятова Ш.Г.	д.ф.-м.н. (Казахстан)
Даулетбекова А.К.	д.ф.-м.н., PhD (Казахстан)
Ержанов К.К.	д.ф.-м.н., PhD (Казахстан)
Жумадилов К.Ш.	доктор PhD (Казахстан)
Здоровец М.	к.ф.-м.н. (Казахстан)
Кадыржанов К.К.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Кайнарбай А.Ж.	д.ф.-м.н. (Казахстан)
Кутербеков К.А.	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Лущик А.Ч.	д.ф.-м.н., проф. (Эстония)
Морзабаев А.К.	д.ф.-м.н. (Казахстан)
Мырзакулов Р.К.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Нурахметов Т.Н.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Сауытбеков С.С.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Салиходжа Ж.М.	д.ф.-м.н. (Казахстан)
Тлеукунов С.К.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Усеинов А.Б.	PhD (Казахстан)
Хоши М.	PhD, проф. (Япония)

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 349, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.
Тел.: (7172) 709-500 (вн. 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Ответственный секретарь, компьютерная верстка: А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

Собственник РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №16999-ж от 27.03.2018г.

Тираж: 25 экземпляров

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажимукана, 12/1, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева. тел.: +7(7172)709-500 (вн. 31-428)

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

№2(127)/2019

МАЗМҰНЫ

<i>Алиева Г.Ж., Кабдрахимова Г.Д., Садықов Б.М., Насурлла М., Мукан Ж., Усабаева Г., Кучук Я., Жолдыбаев Т. К.</i> $E_p = 30$ МэВ энергиялық ^{103}Rh ядросындағы (p,xp) реакциясының екінші реттік протондар эмиссиясы	8
<i>Аралбаева Г.М., Гиниятова Ш.Г.</i> TiO_2 -де латентті тректердің параметрлерін бағалауға арналған термиялық шыңның моделі	16
<i>Жексембаева А., Абуова Ф.У., Ақылбеков А.Т., Абуова А.У., Сарсебай Е.</i> LaMnO_3 кристалының (001) бетіндегі процестерді кванттық механикалық модельдеу	25
<i>Мейрамбай А., Ержанов К.К., Ержанова Ж.О.</i> Фейнмандық диаграммалар толық интегралданатын статистикалық тор жүйесі ретінде	31
<i>Аумаликова М., Ибраева Д., Жумадилов К., Шижкина Е., Бахтин М., Кашкинбаев Е.</i> Уран өндіретін және өндейтін кәсіпорындарда жұмыс істейтін қызметкерлер мен тұрғылықты халықтың дозалық жүктемесін есептеу	38
<i>Ибраева А.Д.</i> Si_3N_4 -те тректүзілу механизмін сипаттау үшін термиялық шыңның серпімсіз моделінің қолдануын зерттеу	48
<i>Мырзакулов Н.А., Мырзакулова Ш.А., Мейрбеков Б.К.</i> $(2+1)$ өлшемді $F(T)$ гравитациясының фермиондық өріспен байланысқандағы космологиялық шешім	57
<i>Рахымбеков А.Ж.</i> Суперионды өткізгіштегі электрлік өткізгіштікті есептеу	67
<i>Сарсенова С.М., Степаненко В.Ф., Жумадилов К.Ш.</i> Оптикалық стимуляцияланған люминесценттік (ОСЛ) дозиметрия әдісінің қазіргі жағдайы	72
<i>Сүйжимбаева Н.Т., Калиев А.М., Разина О.В., Цыба П.Ю.</i> Гейзенбергтің ХХХ моделіндегі 4-еуі кері аударылған спиндер үшін Бете анзацы	80

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. PHYSICS.
ASTRONOMY SERIES

№2(127)/2019

CONTENTS

<i>Aliyeva G.Zh., Kabdrakhimova G.D., Sadykov B.M., Nassurlla M., Mukan Zh., Ussabaeva G., Kucuk Y., Zholdybaev T.K.</i> The emission of secondary protons from reaction (p,xp) at an energy of 30 MeV in the nucleus of ^{103}Rh	8
<i>Aralbayeva G.M., Giniyatova Sh.G.</i> The thermal spike model to estimate the parameters of latent tracks in TiO_2	16
<i>Zheksembayeva A., Abuova F.U., Akylbekov A.T., Abuova A.U., Sarsebai E.</i> Quantum mechanical modeling of processes on the surface of a LaMnO_3 (001) crystal	25
<i>Meirambay A., Yerzhanov K.K., Yerzhanova Zh.O.</i> Feynman diagrams as a completely integrable lattice statistical system	31
<i>Aumalikova M., Ibrayeva D., Zhumadilov K., Shishkina E., Bakhtin M., Kashkinbayev Ye.</i> Calculation of radiation burden of personnel and public, working and living in area of the uranium mining and uranium-processing enterprises	38
<i>Ibrayeva A.D.</i> Study of the applicability of the inelastic thermal peak model to describe the track formation mechanism in Si_3N_4	48
<i>Myrzakulov N.A., Myrzakulova Sh.A., B.K Meirbekov</i> Cosmological solutions for $F(T)$ gravity with fermion fields in (2+1) dimensions	57
<i>Rakhymbekov A.Zh.</i> Calculation of electrical conductivity of a superionic conductor	67
<i>Sarsenova S.M., Stepanenko V.F., Zhumadilov K.Sh.</i> The modern state of optically stimulated luminescence (OSL) dosimetry method	72
<i>Suikimbayeva N.T., Kaliyev A.M., Razina O.V., Tsyba P.Yu.</i> The Bethe ansatz in the XXX model of Heisenberg for the 4-inverted spins	80

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

№2(127)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Алиева Г.Ж., Кабдрахимова Г.Д., Садыков Б. М., Насурлла М., Муқан Ж., Усабаева Г., Кучук Я., Жолдыбаев Т. К.</i> Эмиссия вторичных протонов из реакции (p,xp) при энергии 30 МэВ на ядре ^{103}Rh	8
<i>Аралбаева Г.М., Гиниятова Ш.Г.</i> Модель термического пика для оценки параметров латентных треков в TiO_2	16
<i>Жексембаева А., Абуова Ф.У., Акылбеков А.Т., Абуова А.У., Сарсебай Е.</i> Квантово-механическое моделирование процессов на поверхности кристалла LaMnO_3 (001)	25
<i>Мейрамбай А., Ержанов К.К., Ержанова Ж.О.</i> Фейнмановские диаграммы как вполне интегрируемая статистическая система решетки	31
<i>Аумаликова М., Ибраева Д., Жумадилов К., Шишкина Е., Бахтин М., Кашкинбаев Е.</i> Расчет дозовой нагрузки персонала и населения, работающих и проживающих в области уранодобывающего и ураноперерабатывающего предприятий	38
<i>Ибраева А.Д.</i> Изучение применимости модели неупругого термического пика для описания механизма трекообразования в Si_3N_4	48
<i>Мырзакулов Н.А., Мырзакулова Ш.А., Мейрбеков Б.К.</i> Космологические решения для $F(T)$ гравитации с фермионными полями в (2+1) размерности	57
<i>Рахымбеков А.Ж.</i> Расчет электрической проводимости суперионного проводника	67
<i>Сарсенова С.М., Степаненко В.Ф., Жумадилов К.Ш.</i> Современное состояние метода оптически стимулированной люминесцентной (ОСЛ) дозиметрии	72
<i>Суйкимбаева Н.Т., Калиев А.М., Разина О.В., Цыба П.Ю.</i> Анзац Бете в ХХХ модели Гейзенберга для 4-х перевернутых спинов	80

Н.Т. Суйкимбаева¹, А.М. Калиев², О.В. Разина³, П.Ю. Цыба⁴

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: ¹ nurgul-1708@mail.ru, ² azamat.mk.0210@gmail.com, ³ olvikraz@mail.ru,
⁴ pyotrtsyba@gmail.com)

Анзац Бете в ХХХ модели Гейзенберга для 4-х перевернутых спинов

Аннотация: В данной статье будет применен подход анзаца Бете в квантовых интегрируемых системах, а именно к модели Гейзенберга для ХХХ спиновой цепочки, в размерности $d = 3$, с четырьмя перевернутыми спинами. Применение данного подхода будет реализовано с учетом граничных условий и условия периодичности. Параметризуя систему уравнений Бете, которая позволит получить алгебраическую форму записи, и получить искомое решение задачи. В следствии ряда тривиальных вычислений и введения дополнительных ограничительных условий, представили решения системы уравнений Бете для ХХХ-цепочки в виде соответствующих спектральных параметров. Используя спектральный параметр выразили полный импульс данного состояния и его энергию. Сравнивая энергию при связанном и несвязанном состояниях, показали, что при несвязанном состоянии система имеет наибольшую энергию. Также получены значения энергии для конечного числа спинов в спиновой цепочке.

Ключевые слова: Координатный анзац Бете, уравнения Бете, спиновая цепочка, ХХХ-модель Гейзенберга, λ -параметризация, спектральный параметр, квантовая интегрируемая система, ферромагнетизм.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-68-36-2019-127-2-80-90>

Введение. В начале двадцатого столетия Максвелл сформулировал законы, которые описывают связь между магнитными и электрическими силами и оптикой, но микроскопический механизм, лежащий в основе магнетизма, не был окончательно понят. Появление квантовой механики принесло новое понимание. В 1926 году Гейзенберг и Дирак независимо показали, что принцип запрета Паули приводит к эффективному взаимодействию электронных спинов атомов с перекрывающимися волновыми функциями. Это обменное взаимодействие послужило основой для важной модели ферромагнетизма, опубликованной Гейзенбергом два года спустя [1].

Квантово – интегрируемые модели появились в двух разных областях физики. Первый пример был взят из квантовой механики. Позднее, следом за Гейзенбергом и Дираком, в 1931 году Ханс Бете в своей работе «Теория металлов. I. Собственные значения и собственные функции линейной цепочки атомов» сформулировал метод решения дискретных задач в квантовых интегрируемых системах, превратив проблему поиска спектра модели в задачу решения некоторых связанных уравнений, называемых уравнениями анзаца Бете [1]. Бете применил диагонализацию модели гамильтониана, которая является частным случаем анизотропной одномерной цепочки Гейзенберга. Такой подход показывает, что при решении (относительно) небольшого числа нелинейных уравнений можно построить собственный вектор и собственное значение - то есть вектор ψ , удовлетворяющий задаче $H\psi = E\psi$. В последующие десятилетия работа Бете получила дальнейшее развитие среди других, а в 1960-х годах Янг применил координатный анзац Бете к более общей спиновой цепочке ХХХ-модели Гейзенберга, и было получено множество точных решений данных задач в различных точных моделях, что позволило значительно продвинуться в изучении класса квантовых интегрируемых систем.

Вторым источником квантово-интегрируемых моделей была статистическая механика. Здесь прототип представляет собой модель с шестью вершинами или модель типа льда для двумерных кристаллов с водородными связями. В конце 1960-х годов Либу и Сазерленду удалось решить модель из шести вершин, используя ту же конструкцию Бете для нахождения собственных векторов для трансфер-матрицы шестивершинной модели. Этот же метод широко

использовал Онзагер для решения модели Изинга с 2D-мерной квадратной решеткой в 1944 году, вместе с координатным анзацем Бете, как в работе Янга. Это решение обнаружило несколько поразительных сходств между шестивершинной моделью и спиновой цепочкой XXZ и пролило свет на причину, по которой эти модели могут быть решены. В следствии шестивершинная модель, первоначально предложенная Полингом в 1931 году для изучения термодинамических свойств льда, сама по себе является основным объектом исследования. Работа Бакстера показала, что в модели шести вершин имеется богатая алгебраическая структура (а также модель восьми вершин, которая ее обобщает). Его подход, основанный на коммутирующих матрицах и так называемых отношениях Янга-Бакстера, привел к большому обобщению оригинальной техники Бете. Этот подход, названный алгебраическим анзацем Бете (чтобы отличить его от координатного анзаца Бете), был в центре исследования точно решаемых моделей в течение следующих двух десятилетий.

В конце 1970-х годов эти две истории были объединены квантовым методом обратного рассеяния (КМОР), разработанным «ленинградской группой» Фаддеева и др. Используя идеи классической интегрируемости и теории солитонов, КМОР обеспечивает алгебраическую основу для квантово-интегрируемых моделей, в частности, приводя к уравнениям анзаца Бете через алгебраический анзац Бете. В качестве других примеров можно также назвать модель одномерного бозе-газа с парным точечным взаимодействием между частицами, иные n -вершинные модели, $s-d$ модели, модели Андерсона и многие другие модели [2].

Спиновые цепи являются важными 1D-мерными системами, которые доступны экспериментальным методам, и которые возможно описать с помощью моделирования магнитных взаимодействий в спинах между последующими узлами решетки, содержащие частицы со спином. Спиновая цепь, в одном измерении также называемая квантовым магнитом, который был введен в 1928 году Гейзенбергом [3-4], с использованием модели может быть исследована теоретически. Метод анзаца Бете был основан на предположении о плоско волновых решениях для волновой функции системы [5]. Затем граничные условия периодичности дают границы для фаз рассеяния волновых функций системы, следовательно, эти границы можно преобразовать в систему уравнений, которые носят имя Бете. Решение данной системы уравнений дает решение скоростей, из которых возможно рассчитать широкий спектр измеримых физических свойств.

Подстановка Бете оказалась не только полезной для модели Гейзенберга, но и мощным методом для широкого спектра моделей как в рамках теории конденсированного состояния, так и за ее пределами. Чтобы обеспечить применимость подстановки Бете к определенной модели, необходимо упомянуть важное математическое понятие – понятие интегрируемости. Если модель является интегрируемой, то она может быть точно диагонализирована с помощью метода Бете [6].

Исследование квантовых моделей методом анзаца Бете в настоящее время является актуальным, поскольку позволяет получать решения для сложных и нетривиальных моделей. Так, например, в работе [7] посредством применения анзаца Бете рассмотрена шестивершинная модель, описываемая системой полиномиальных уравнений, и получены решения для системы состоящей из двух магнонов. В работе [8], решая спиновую цепь Гейзенберга XXX , получают уравнение Бете через алгебраический анзац Бете. Затем автор решает более сложную $SU(3)$ киральную модель Гросса-Неве. В [9] рассмотрен гамильтониан спиновой цепочки XXX модели Гейзенберга с классическим и квантовым основными состояниями. В работе [10-11] решением модели Либа-Линигера и Гейзенберга (XXX , XXZ) в различных состояниях показаны сложности и проблемы, возникающие в ходе их решений.

В этой статье мы сосредоточимся на исходной формулировке – координатном анзаце Бете – так как этого достаточно для нашего анализа 3D-мерной квантово – интегрируемой XXX -модели Гейзенберга, с четырьмя перевернутыми спинами в спиновой цепочке. Обычно квантовая (статистическая) модель считается «решенной», если известны основные состояния, элементарные возбуждения и различные термодинамические величины. Квантово-интегрируемые модели обладают глубокой структурой, которая часто позволяет точно вычислять такие величины. В то же время некоторые из этих моделей вполне реалистичны,

и теоретические результаты могут быть проверены экспериментально. Нашей целью будет представить полный импульс и энергию приведенного состояния. В ходе работы для получения требующихся данных найдем спектральный параметр с помощью решения координатной формы системы уравнений Бете XXX-цепочки. Составления которых потребует параметризации системы и наложения определенных ограничивающих условий на нее. Методология и пути решения поставленной задачи представлены в основной части научной работы.

XXX-модель бесконечной спиновой цепочки Гейзенберга

Рассмотрим цепочку, описывающуюся гамильтонианом XXX модели Гейзенберга. В подпространстве $H(4) \subset H$ (четыре перевернутых спина) должно быть $N(N - 1)/2$ собственных вектора. Собственные вектора можно искать в виде

$$|\psi^{(4)}\rangle = \sum_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4 \leq N} a(k_1, k_2, k_3, k_4) \sigma_-^1 \sigma_-^2 \sigma_-^3 \sigma_-^4 |\Omega\rangle, \quad (1)$$

где $a(k_1, k_2, k_3, k_4)$ - неизвестные коэффициенты, удовлетворяющие условиям периодичности, которые будут получены ниже. Эти коэффициенты $a(k_1, k_2, k_3, k_4)$ называют четырехволновой функцией (в координатном представлении). Далее вместо $|\psi^{(4)}\rangle$ будем писать $|\psi\rangle$. Уравнение на собственные значения оператора гамильтона имеет вид

$$H^{XXX} \psi = (N - P) \psi, \quad (2)$$

где $P \equiv \sum_{k=1}^N P_{k,k+1}$, $P|\psi\rangle = (N - E)|\psi\rangle$. Задача состоит в поиске соотношений на коэффициенты $a(k_1, k_2, k_3, k_4)$. Для этого свернем обе части с ковектором $|\Omega\rangle \sigma_+^{n_4} \sigma_+^{n_3} \sigma_+^{n_2} \sigma_+^{n_1}$

$$|\Omega\rangle \sigma_+^{n_4} \sigma_+^{n_3} \sigma_+^{n_2} \sigma_+^{n_1} P |\psi\rangle = |\Omega\rangle (N - E) \sigma_+^{n_4} \sigma_+^{n_3} \sigma_+^{n_2} \sigma_+^{n_1} |\psi\rangle, \quad (3)$$

и пронесем операторы перестановки налево, где они, подействовав на левый вакуум, благополучно исчезнут, поскольку вакуумное состояние инвариантно относительно любых перестановок (все спины смотрят вверх). Правило проноса таково

$$\begin{aligned} \sigma_+^{(n)} P_{k,k+1} = P_{k,k+1} & \left[\sigma_+^{(n_1)} + \delta_{kn_1} (\sigma_+^{(n_1+1)} - \sigma_+^{(n_1)}) + \delta_{k+1,n_1} (\sigma_+^{(n_1-1)} - \sigma_+^{(n_1)}) \right] \times \\ & \left[\sigma_+^{(n_2)} + \delta_{kn_2} (\sigma_+^{(n_2+1)} - \sigma_+^{(n_2)}) + \delta_{k+1,n_2} (\sigma_+^{(n_2-1)} - \sigma_+^{(n_2)}) \right] \times \\ & \left[\sigma_+^{(n_3)} + \delta_{kn_3} (\sigma_+^{(n_3+1)} - \sigma_+^{(n_3)}) + \delta_{k+1,n_3} (\sigma_+^{(n_3-1)} - \sigma_+^{(n_3)}) \right] \times \\ & \left[\sigma_+^{(n_4)} + \delta_{kn_4} (\sigma_+^{(n_4+1)} - \sigma_+^{(n_4)}) + \delta_{k+1,n_4} (\sigma_+^{(n_4-1)} - \sigma_+^{(n_4)}) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее просуммируем по k и воспользуемся тождеством $a(n_1, n_2, n_3, n_4) = \langle \Omega | \sigma_+^{n_4} \sigma_+^{n_3} \sigma_+^{n_2} \sigma_+^{n_1} | \psi \rangle$ ($n_1 < n_2 < n_3 < n_4$). В случае $n_1 < n_2 - 1; n_2 < n_3 - 1; n_3 < n_4 - 1$ получаем условия

$$\begin{aligned} & -12a(n_1, n_2, n_3, n_4) + 6a(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4) + 7a(n_1, n_2, n_3 - 1, n_4) + \\ & + 6a(n_1, n_2, n_3, n_4 + 1) - 4a(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4 + 1) - 4a(n_1 - 1, n_2, n_3 - 1, n_4 + 1) + \\ & + 6a(n_1, n_2, n_3, n_4 - 1) - a(n_1, n_2, n_3 + 1, n_4 - 1) - 3a(n_1, n_2, n_3 - 1, n_4 - 1) + \\ & + 7a(n_1, n_2 + 1, n_3, n_4) - a(n_1, n_2 + 1, n_3 + 1, n_4) - 2a(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4) - \\ & - 3a(n_1, n_2 + 1, n_3, n_4 + 1) + a(n_1, n_2 + 1, n_3 + 1, n_4 + 1) + a(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1) + \\ & + a(n_1, n_2 + 1, n_3 + 1, n_4 - 1) - 3a(n_1, n_2 + 1, n_3, n_4 - 1) + 4a(n_1, n_2 - 1, n_3, n_4) - \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & -3a(n_1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4) - 3a(n_1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4) + a(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 - 1) - \\
 & -3a(n_1, n_2 - 1, n_3, n_4 + 1) + a(n_1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 + 1) + a(n_1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 + 1) - \\
 & -3a(n_1, n_2 - 1, n_3, n_4 - 1) + a(n_1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1) + a(n_1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 - 1) + \\
 & + 7a(n_1 + 1, n_2, n_3, n_4) + a(n_1 + 1, n_2, n_3 + 1, n_4 + 1) - 4a(n_1 + 1, n_2, n_3, n_4 + 1) + \\
 & + 2a(n_1 + 1, n_2, n_3 - 1, n_4 + 1) - 3a(n_1 + 1, n_2, n_3 - 1, n_4) - a(n_1 + 1, n_2 + 1, n_3 + 1, n_4) - \\
 & - 2a(n_1 + 1, n_2 + 1, n_3, n_4) + a(n_1 + 1, n_2 + 1, n_3, n_4 - 1) - 3a(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, n_4) + \\
 & + a(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4) + a(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4) + a(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, n_4 + 1) + \\
 & + 2a(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, n_4 - 1) + 7a(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4) - 3a(n_1 - 1, n_2, n_3 - 1, n_4) - \\
 & - 3a(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4 + 1) + a(n_1 - 1, n_2, n_3 + 1, n_4 + 1) - 4a(n_1 - 1, n_2, n_3 + 1, n_4) + \\
 & + a(n_1 - 1, n_2, n_3 - 1, n_4 + 1) - 3a(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4 - 1) + 3a(n_1 - 1, n_2, n_3 + 1, n_4 - 1) + \\
 & + a(n_1 - 1, n_2, n_3 - 1, n_4 - 1) - 3a(n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, n_4) + a(n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 + 1, n_4) + \\
 & + a(n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4) + 2a(n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, n_4 + 1) - 3a(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3, n_4) + \\
 & + a(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4) + a(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4) + a(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3, n_4 + 1) + \\
 & + a(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3, n_4 - 1) = -Ea(n_1, n_2, n_3, n_4).
 \end{aligned}$$

Если же $n_1 = n_2 - 1 = n$, $n_2 = n_3 - 1 = n + 1$, $n_3 = n_2 + 1 = n + 2$, $n_4 = n_3 + 1 = n + 3$ получаем условия

$$\begin{aligned}
 & a(n, n + 1, n + 2, n + 2) - 7a(n, n + 1, n + 2, n + 3) + a(n, n + 2, n + 2, n + 3) + \quad (6) \\
 & + a(n, n + 1, n + 2, n + 4) + 2a(n, n, n + 2, n + 3) + a(n + 1, n + 1, n + 2, n + 3) + \\
 & a(n - 1, n + 1, n + 2, n + 3) = -Ea(n, n + 1, n + 2, n + 4).
 \end{aligned}$$

Если $n_1 = 1, n_2 = N - 2, n_3 = N - 1, n_4 = N$, получаем

$$\begin{aligned}
 & a(1, N - 2, N - 1, N - 1) - 7a(1, N - 2, N - 1, N) + a(1, N - 1, N - 1, N) + \quad (7) \\
 & + a(1, N - 2, N - 1, N + 1) + a(1, N - 3, N - 1, N) + a(2, N - 2, N - 1, N) + \\
 & + a(1, N - 3, N - 1, N) + a(0, N - 2, N - 1, N) = -Ea(1, N - 2, N - 1, N).
 \end{aligned}$$

Забудем пока про уравнения (6) и (7), которые вступают в силу только для ближайших соседей, и попытаемся найти, возможно, более общее решение уравнения (5), распространив его на все возможные значения n_1, n_2, n_3, n_4 и не накладывая пока никаких дополнительных условий типа периодичности. Очевидно, одно из решений уравнения (5) при всех n_1, n_2, n_3, n_4 это $a(n_1, n_2, n_3, n_4) = e^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2 + ip_3 n_3 + ip_4 n_4}$ с энергией $E - E_0 = [(1 - \cos p_1) + (1 - \cos p_2) + (1 - \cos p_3) + (1 - \cos p_4)]$ и импульсом $P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$. Можно было бы рассмотреть любую линейную комбинацию решений вида $e^{\pm ip_1 n_1 \pm ip_2 n_2 \pm ip_3 n_3 \pm ip_4 n_4}$. Все они имеют одну и ту же энергию, но их суперпозиции нам не подходят, поскольку они не будут собственными для оператора сдвига. Будем писать $a(n_1, n_2, n_3, n_4)$ в виде

$$\begin{aligned}
 a(n_1, n_2, n_3, n_4) = & Ae^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2 + ip_3 n_3 + ip_4 n_4} + Be^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2 + ip_3 n_3 + ip_4 n_4} + \quad (8) \\
 & Ce^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2 + ip_3 n_3 + ip_4 n_4} + De^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2 + ip_3 n_3 + ip_4 n_4},
 \end{aligned}$$

с произвольными A, B, C, D при этом по-прежнему выполняется выражение $E - E_0 = [(1 - \cos p_1) + (1 - \cos p_2) + (1 - \cos p_3) + (1 - \cos p_4)]$ и $P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, т.е.

$$a(n_1 + 1, n_2 + 1, n_3 + 1, n_4 + 1) = e^{i(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)} a(n_1, n_2, n_3, n_4). \quad (9)$$

При произвольных A, B, C и D оно не удовлетворяет уравнению (6). Подберем A, B, C и D так, чтобы это уравнение тоже удовлетворилось. Вычтем (6) из (5) при $n_1 = n_2 - 1 = n <$

$N, n_2 = n_3 - 1, n_3 = n_4 - 1$, чтобы получить E . Получим дополнительное условие

$$\begin{aligned}
 & -12a(n, n+1, n+2, n+3) + 6a(n, n+1, n+3, n+3) + 7a(n, n+1, n+1, n+3) + \quad (10) \\
 & +6a(n, n+1, n+2, n+4) - 4a(n, n+1, n+3, n+4) - 4a(n-1, n+1, n+1, n+4) + \\
 & +6a(n, n+1, n+2, n+2) - a(n, n+1, n+3, n+2) - 3a(n, n+1, n+1, n+2) + \\
 & +7a(n, n+2, n+2, n+3) - a(n, n+2, n+3, n+3) - 2a(n, n+2, n+1, n+3) - \\
 & -3a(n, n+2, n+2, n+4) + a(n, n+2, n+3, n+4) + a(n, n+2, n+1, n+4) + \\
 & +a(n, n+2, n+3, n+2) - 3a(n, n+2, n+2, n+2) + 4a(n, n, n+2, n+3) - \\
 & -3a(n, n, n+2, n+3) - 3a(n, n, n+1, n+3) + a(n, n+2, n+1, n+2) - \\
 & -3a(n, n, n+2, n+4) + a(n, n, n+3, n+4) + a(n, n, n+1, n+4) - \\
 & -3a(n, n, n+2, n+2) + a(n, n, n+3, n+2) + a(n, n, n+1, n+2) + \\
 & +7a(n+1, n+1, n+2, n+3) + a(n+1, n+1, n+3, n+4) - 4a(n+1, n+1, n+2, n+4) + \\
 & +2a(n+1, n+1, n+1, n+4) - 3a(n+1, n+1, n+1, n+2) - a(n+1, n+2, n+3, n+3) - \\
 & -2a(n+1, n+2, n+2, n+3) + a(n+1, n+2, n+2, n+2) - 3a(n+1, n, n+2, n+3) + \\
 & +a(n+1, n, n+3, n+3) + a(n+1, n, n+1, n+3) + a(n+1, n, n+2, n+4) + \\
 & +2a(n+1, n, n+2, n+2) + 7a(n-1, n+1, n+2, n+3) - 3a(n-1, n+1, n+1, n+3) - \\
 & -3a(n-1, n+1, n+2, n+4) + a(n-1, n+1, n+3, n+4) - 4a(n-1, n+1, n+3, n+3) + \\
 & +a(n-1, n+1, n+1, n+4) - 3a(n-1, n+1, n+2, n+2) + 3a(n-1, n+1, n+3, n+2) + \\
 & +a(n-1, n+1, n+1, n+2) - 3a(n-1, n+2, n+2, n+3) + a(n-1, n+2, n+3, n+3) + \\
 & +a(n-1, n+2, n+1, n+3) + 2a(n-1, n+2, n+2, n+4) - 3a(n-1, n, n+2, n+3) + \\
 & +a(n-1, n, n+3, n+3) + a(n-1, n, n+1, n+3) + \\
 & +a(n-1, n, n+2, n+4) + a(n-1, n, n+2, n+2) = 0,
 \end{aligned}$$

которому должна удовлетворять волновая функция (8). Получим аналогичное условие на конце цепочки (на самом деле свернутой в кольцо), т.е. при $n = N$. Для этого вычтем (7) из (5) при $n_1 = 1, n_2 = N - 2, n_3 = N - 1, n_4 = N$, получим условие

$$\begin{aligned}
 & -12a(1, N-2, N-1, N) + 6a(1, N-2, N, N) + 7a(1, N-2, N-2, N) + \quad (11) \\
 & +6a(1, N-2, N+1, N+1) - 4a(1, N-2, N, N+1) - 4a(0, N-2, N-2, N+1) + \\
 & +6a(1, N-2, N-1, N-1) - a(1, N-2, N, N-1) - 3a(1, N-2, N-2, N-1) + \\
 & +7a(1, N-1, N-1, N) - a(1, N-1, N, N) - 2a(1, N-1, N-2, N) - \\
 & -3a(1, N-1, N-1, N+1) + a(1, N-1, N, N+1) + a(1, N-1, N-2, N+1) + \\
 & +a(1, N-1, N, N-1) - 3a(1, N-1, N-1, N-1) + 4a(1, N-3, N-1, N) - \\
 & -3a(1, N-3, N, N) - 3a(1, N-3, N-2, N) + a(1, N-1, N-2, N-1) - \\
 & -3a(1, N-3, N-1, N+1) + a(1, N-3, N, N+1) + a(1, N-3, N-2, N+1) - \\
 & -3a(1, N-3, N-1, N-1) + a(1, N-3, N, N-1) + a(1, N-3, N-2, N-1) + \\
 & +7a(2, N-2, N-1, N) + a(2, N-2, N, N+1) - 4a(2, N-2, N-1, N+1) + \\
 & +2a(2, N-2, N-2, N+1) - 3a(2, N-2, N-2, N) - a(2, N-1, N, N) - \\
 & -2a(2, N-1, N-1, N) + a(2, N-1, N-1, N-1) - 3a(2, N-3, N-1, N) + \\
 & +a(2, N-3, N, N) + a(2, N-3, N-2, N) + a(2, N-3, N-1, N+1) + \\
 & +2a(2, N-3, N-1, N-1) + 7a(0, N-2, N-1, N) - 3a(0, N-2, N-2, N) - \\
 & -3a(0, N-2, N-2, N+1) + a(0, N-2, N, N+1) - 4a(0, N-2, N, N) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+a(0, N-2, N-2, N+1) - 3a(0, N-2, N-1, N-1) + 3a(0, N-2, N, N-1) + \\
 &+a(0, N-2, N-2, N-1) - 3a(0, N-1, N-1, N) + a(0, N-1, N, N) + \\
 &+a(0, N-1, N-2, N) + 2a(0, N-1, N-1, N+1) - 3a(0, N-3, N-1, N) + \\
 &+a(0, N-3, N, N) + a(0, N-3, N-2, N) + a(0, N-3, N-1, N+1) + \\
 &+a(0, N-3, N-1, N-1) = 0.
 \end{aligned}$$

Но в силу N -периодичности $a(0, N) = a(N, N)$, $a(1, N+1) = a(1, 1)$, $a(N, N+1) = a(1, N)$, так что это условие совпадает с (10), взятом при $n = N$. Подставив (10) в (8), найдем, что (8) является решением, если коэффициенты A, B, C и D связаны формулой

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{B} &= -\frac{1 + e^{i(p_1+p_2+p_3)} - 2e^{ip_1}}{1 + e^{i(p_1+p_2+p_3)} - 2e^{ip_2}} = e^{i\theta(p_1, p_2) + i\theta(p_1, p_3)}, \\
 \frac{B}{C} &= -\frac{1 + e^{i(p_1+p_2+p_3)} - 2e^{ip_2}}{1 + e^{i(p_1+p_2+p_3)} - 2e^{ip_3}} = e^{i\theta(p_1, p_2) + i\theta(p_2, p_3)}, \\
 \frac{C}{D} &= -\frac{1 + e^{i(p_1+p_2+p_3)} - 2e^{ip_3}}{1 + e^{i(p_1+p_2+p_3)} - 2e^{ip_4}} = e^{i\theta(p_1, p_3) + i\theta(p_3, p_4)}, \\
 \frac{D}{A} &= -\frac{1 + e^{i(p_1+p_2+p_3)} - 2e^{ip_4}}{1 + e^{i(p_1+p_2+p_3)} - 2e^{ip_1}} = e^{i\theta(p_1, p_4) + i\theta(p_4, p_1)},
 \end{aligned} \tag{12}$$

где $\theta_{12} = \theta(p_1, p_2) = -\theta_{21}$, $\theta_{13} = \theta(p_1, p_3) = -\theta_{31}$, $\theta_{14} = \theta(p_1, p_4) = -\theta_{41}$.

Получаем:

$$\begin{aligned}
 a(n_1, n_2, n_3, n_4) &= e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 + p_4 n_4 + \left(\frac{\theta_{12} + \theta_{23}}{2}\right))} + e^{i(p_2 n_1 + p_3 n_2 + p_4 n_3 + p_1 n_4 + \left(\frac{\theta_{23} + \theta_{13}}{2}\right))} + \\
 &e^{i(p_3 n_1 + p_4 n_2 + p_1 n_3 + p_2 n_4 + \left(\frac{\theta_{13} + \theta_{12}}{2}\right))} + e^{i(p_4 n_1 + p_1 n_2 + p_2 n_3 + p_3 n_4 + \left(\frac{\theta_{13} + \theta_{12}}{2}\right))}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Из (12) следуют соотношения

$$2 \operatorname{ctg} \frac{\theta_{ij}}{2} = \operatorname{ctg} \frac{p_i}{2} - \operatorname{ctg} \frac{p_j}{2}, \quad i, j = 1, \dots, r, \quad \text{и} \quad N p_i = 2\pi \lambda_{i,j} - \sum_{i \neq j} \theta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, r. \tag{14}$$

λ -называют квантовым числом Бете, $\lambda_i = 1, \dots, N-1$ которые мы будем применять для вычисления энергии при конечном числе спинов в цепочке.

Из условия периодичности сразу следуют ограничения на возможные значения p_1, p_2, p_3, p_4

$$\begin{cases} e^{ip_1 N} = e^{i\theta(p_1, p_2)} \cdot e^{i\theta(p_1, p_3)} \cdot e^{i\theta(p_1, p_4)}, \\ e^{ip_2 N} = e^{i\theta(p_2, p_1)} \cdot e^{i\theta(p_2, p_3)} \cdot e^{i\theta(p_2, p_4)}, \\ e^{ip_3 N} = e^{i\theta(p_3, p_1)} \cdot e^{i\theta(p_3, p_2)} \cdot e^{i\theta(p_3, p_4)}, \\ e^{ip_4 N} = e^{i\theta(p_4, p_1)} \cdot e^{i\theta(p_4, p_2)} \cdot e^{i\theta(p_4, p_3)}. \end{cases} \tag{15}$$

Это система Бете [12-13]. Для решения системы (15) будем ее параметризовать следующим образом:

$$e^{ip} = \frac{\lambda + \frac{1}{2}}{\lambda - \frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{p}{2}. \tag{16}$$

Система уравнений Бете [14] запишется в виде

$$\begin{cases} \left(\frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - i}{\lambda_1 - \lambda_2 + i} \cdot \frac{\lambda_1 - \lambda_3 - i}{\lambda_1 - \lambda_3 + i} \cdot \frac{\lambda_1 - \lambda_4 - i}{\lambda_1 - \lambda_4 + i}, \\ \left(\frac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - i}{\lambda_2 - \lambda_1 + i} \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_3 - i}{\lambda_2 - \lambda_3 + i} \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_4 - i}{\lambda_2 - \lambda_4 + i}, \\ \left(\frac{\lambda_3 - \frac{i}{2}}{\lambda_3 + \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_3 - \lambda_1 - i}{\lambda_3 - \lambda_1 + i} \cdot \frac{\lambda_3 - \lambda_2 - i}{\lambda_3 - \lambda_2 + i} \cdot \frac{\lambda_3 - \lambda_4 - i}{\lambda_3 - \lambda_4 + i}, \\ \left(\frac{\lambda_4 - \frac{i}{2}}{\lambda_4 + \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_4 - \lambda_1 - i}{\lambda_4 - \lambda_1 + i} \cdot \frac{\lambda_4 - \lambda_2 - i}{\lambda_4 - \lambda_2 + i} \cdot \frac{\lambda_4 - \lambda_3 - i}{\lambda_4 - \lambda_3 + i}. \end{cases} \tag{17}$$

В случае термодинамического предела, то есть при $N \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}} = \omega_1 e^{\frac{i}{N} \theta_{1234}}, \\ \frac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}} = \omega_2 e^{-\frac{i}{N} \theta_{1234}}, \\ \frac{\lambda_3 - \frac{i}{2}}{\lambda_3 + \frac{i}{2}} = \omega_3 e^{-\frac{i}{N} \theta_{1234}}, \\ \frac{\lambda_4 - \frac{i}{2}}{\lambda_4 + \frac{i}{2}} = \omega_4 e^{-\frac{i}{N} \theta_{1234}}. \end{cases} \quad (18)$$

Уравнения (17) могут иметь и комплексные решения [15]. Положим $\lambda_1 = u_1 + iv_1, \lambda_2 = u_2 + iv_2, \lambda_3 = u_3 + iv_3, \lambda_4 = u_4 + iv_4$. Модуль уравнений дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}} \right)^N &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - i}{\lambda_1 - \lambda_2 + i} \cdot \frac{\lambda_1 - \lambda_3 - i}{\lambda_1 - \lambda_3 + i} \cdot \frac{\lambda_1 - \lambda_4 - i}{\lambda_1 - \lambda_4 + i}, \\ \left(\frac{u_1 + iv_1 - \frac{i}{2}}{u_1 + iv_1 + \frac{i}{2}} \right)^N &= \frac{u_1 + iv_1 - u_2 + iv_2 - i}{u_1 + iv_1 - u_2 - iv_2 + i} \cdot \frac{u_1 + iv_1 - u_3 + iv_3 - i}{u_1 + iv_1 - u_3 - iv_3 + i} \cdot \frac{u_1 + iv_1 - u_4 + iv_4 - i}{u_1 + iv_1 - u_4 - iv_4 + i}, \\ \left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{1}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})} \right)^N &= \frac{u_1 - u_2 + i(v_1 - v_2 - 1)}{u_1 - u_2 + i(v_1 - v_2 + 1)} \cdot \frac{u_1 - u_3 + i(v_1 - v_3 - 1)}{u_1 - u_3 + i(v_1 - v_3 + 1)} \cdot \frac{u_1 - u_4 + i(v_1 - v_4 - 1)}{u_1 - u_4 + i(v_1 - v_4 + 1)}, \\ \left(\frac{u_1^2 + (v_1 - \frac{1}{2})^2}{u_1^2 + (v_1 + \frac{1}{2})^2} \right)^N &= \frac{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2 - 1)^2}{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2 + 1)^2} \cdot \frac{(u_1 - u_3)^2 + (v_1 - v_3 - 1)^2}{(u_1 - u_3)^2 + (v_1 - v_3 + 1)^2} \times \\ &\times \frac{(u_1 - u_4)^2 + (v_1 - v_4 - 1)^2}{(u_1 - u_4)^2 + (v_1 - v_4 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть $v_1 > 0, v_2 > 0$, тогда левая часть экспоненциально мала при $N \rightarrow \infty$. Переумножив четыре уравнения, получим

$$\left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{1}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})} \cdot \frac{u_2 + i(v_2 - \frac{1}{2})}{u_2 + i(v_2 + \frac{1}{2})} \cdot \frac{u_3 + i(v_3 - \frac{1}{2})}{u_3 + i(v_3 + \frac{1}{2})} \cdot \frac{u_4 + i(v_4 - \frac{1}{2})}{u_4 + i(v_4 + \frac{1}{2})} \right)^N = 1. \quad (20)$$

С экспоненциальной точностью имеем при $u_1 = u_2 = u_3 = u_4, v_1 - v_2 = 1, v_2 - v_3 = 1, v_3 - v_4 = 1, v_4 - v_1 = 1$. Взяв по модулю обе части второго уравнения, видим, что $v_3 < 0, v_4 < 0$.

$$\left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{1}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})} \cdot \frac{u_1 + i(v_1 - \frac{3}{2})}{u_1 + i(v_1 - \frac{1}{2})} \cdot \frac{u_1 + i(v_1 - \frac{5}{2})}{u_1 + i(v_1 - \frac{3}{2})} \cdot \frac{u_1 + i(v_1 - \frac{7}{2})}{u_1 + i(v_1 - \frac{5}{2})} \right)^N = 1. \quad (21)$$

После упрощения приходим к соотношению

$$\left(\frac{u_1 + i(v_1 - \frac{7}{2})}{u_1 + i(v_1 + \frac{1}{2})} \right)^N = 1. \quad (22)$$

откуда $v_1 = \frac{3}{2}, v_2 = \frac{1}{2}, v_3 = -\frac{1}{2}, v_4 = -\frac{3}{2}$. Итак, с экспоненциальной точностью при $N \rightarrow \infty$ имеем семейство решений

$$\lambda_1 = u + i\frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = u + \frac{i}{2}, \quad \lambda_3 = u - \frac{i}{2}, \quad \lambda_4 = u - i\frac{3}{2}. \quad (23)$$

Вещественный параметр u произволен. Через него выражается полный импульс данного состояния и его энергия

$$\begin{aligned} p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) &= p(\lambda_1) + p(\lambda_2) + p(\lambda_3) + p(\lambda_4), \\ E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) &= \varepsilon(\lambda_1) + \varepsilon(\lambda_2) + \varepsilon(\lambda_3) + \varepsilon(\lambda_4). \end{aligned} \quad (24)$$

$$p(\lambda) = -i \ln \frac{\lambda_1 + \frac{1}{2}}{\lambda_1 - \frac{1}{2}} - i \ln \frac{\lambda_2 + \frac{1}{2}}{\lambda_2 - \frac{1}{2}} - i \ln \frac{\lambda_3 + \frac{1}{2}}{\lambda_3 - \frac{1}{2}} - i \ln \frac{\lambda_4 + \frac{1}{2}}{\lambda_4 - \frac{1}{2}} = -i \ln \left(\frac{2+i}{2-i} \right). \quad (25)$$

$$E = \frac{(\lambda_2^2 + \frac{1}{4})(\lambda_3^2 + \frac{1}{4})(\lambda_4^2 + \frac{1}{4}) + (\lambda_1^2 + \frac{1}{4})(\lambda_3^2 + \frac{1}{4})(\lambda_4^2 + \frac{1}{4})}{(\lambda_1^2 + \frac{1}{4})(\lambda_2^2 + \frac{1}{4})(\lambda_3^2 + \frac{1}{4})(\lambda_4^2 + \frac{1}{4})} + \frac{(\lambda_1^2 + \frac{1}{4})(\lambda_2^2 + \frac{1}{4})(\lambda_4^2 + \frac{1}{4}) + (\lambda_1^2 + \frac{1}{4})(\lambda_2^2 + \frac{1}{4})(\lambda_3^2 + \frac{1}{4})}{(\lambda_1^2 + \frac{1}{4})(\lambda_2^2 + \frac{1}{4})(\lambda_3^2 + \frac{1}{4})(\lambda_4^2 + \frac{1}{4})} = \frac{4}{u^2 + 4}. \quad (26)$$

Можно показать, что энергия связанных частиц $E(u + i\frac{3}{2}, u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2}, u - i\frac{3}{2})$ всегда меньше, чем энергия четырех частиц с импульсами p_1, p_2, p_3 и p_4 такими, что $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = p(u + i\frac{3}{2}, u + \frac{i}{2}, u - \frac{i}{2}, u - i\frac{3}{2}) = p(\frac{u}{4})$. Энергия четырех частиц при не связанном состоянии с импульсом $p(\frac{u}{4})$ имеет следующий вид:

$$E(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1}{4}} = \frac{16}{u^2 + 4}. \quad (27)$$

Принимая во внимание уравнение (26), можно утверждать, что энергия несвязанного состояния в четыре раза больше связанного.

Далее рассмотрим спиновую цепочку для конечного числа спинов $N = 8$ и $N = 9$, $S_T = \frac{N}{2} - r_1$. В таблицах 1,2 показаны результаты вычислений значения энергии в зависимости от конфигурации системы спинов, вычисленных из (14). В таблицах приведены расчеты для $r_0 = 0$, $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$ с действительными значениями импульсов p_i . Также возможны и их комплексные значения.

Таблица 1 – Решение для $N = 8, r = 4$.

S_T	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$4p/\pi$	p_1	p_2	p_3	p_4	$E - E_0$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0	0	0	$\pi/4$	0,293
3	0	0	0	2	2	0	0	0	$\pi/2$	1
3	0	0	0	3	3	0	0	0	$3\pi/2$	1
3	0	0	0	4	4	0	0	0	π	2
3	0	0	0	5	5	0	0	0	$5\pi/4$	1,707
3	0	0	0	6	6	0	0	0	$3\pi/2$	1
3	0	0	0	7	7	0	0	0	$7\pi/4$	0,293
2	0	0	1	3	4	0	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	2
2	0	0	1	4	5	0	0	1,00041	2,92658	2,43701
2	0	0	1	5	6	0	0	0,963928	3,71198	2,27139
2	0	0	1	6	7	0	0	0,939323	5,76499	0,54095
2	0	0	1	7	0	0	0	$2\pi/7$	$12\pi/7$	0,75302
2	0	0	2	4	6	0	0	1,72547	0,460278	1,25812
2	0	0	2	5	7	0	0	1,84581	3,65197	3,144412
2	0	0	2	6	0	0	0	$4\pi/7$	$10\pi/7$	2,44504
2	0	0	2	7	1	0	0	1,72472	5,34386	1,56298
2	0	0	3	5	0	0	0	$6\pi/7$	$8\pi/7$	3,80193
2	0	0	3	6	1	0	0	2,63121	4,43737	3,14412
2	0	0	3	7	2	0	0	2,54012	5,31386	2,25879
2	0	0	4	6	2	0	0	3,46671	4,38727	3,26703
2	0	0	4	7	3	0	0	3,3566	5,28278	2,43701
2	0	0	5	7	4	0	0	$4\pi/3$	$5\pi/3$	2

Таблица 2 – Решение для $N = 9, r = 4$.

S_T	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$9p/2\pi$	p_1	p_2	p_3	p_4	$E - E_0$
9/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7/2	0	0	0	1	1	0	0	0	$2\pi/9$	0,233955
7/2	0	0	0	2	2	0	0	0	$4\pi/9$	0,826351
7/2	0	0	0	3	3	0	0	0	$2\pi/3$	1,5
7/2	0	0	0	4	4	0	0	0	$8\pi/9$	1,9396926
7/2	0	0	0	5	5	0	0	0	$10\pi/9$	1,9396926
7/2	0	0	0	6	6	0	0	0	$4\pi/3$	1,5
7/2	0	0	0	7	7	0	0	0	$14\pi/9$	0,826351

S_T	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$9p/2\pi$	p_1	p_2	p_3	p_4	$E - E_0$
7/2	0	0	0	8	8	0	0	0	$16\pi/9$	0,233955
5/2	0	0	1	3	4	0	0	0,92068	1,87185	1,69124
5/2	0	0	1	4	5	0	0	0,881474	2,60918	2,2256
5/2	0	0	1	5	6	0	0	0,858113	3,33068	2,3230
5/2	0	0	1	6	7	0	0	0,838611	4,04831	1,9478
5/2	0	0	1	7	8	0	0	0,817258	4,7678	1,2603
5/2	0	0	1	8	0	0	0	$\pi/4$	$7\pi/4$	0,585
5/2	0	0	2	4	6	0	0	1,6844	2,50439	2,9171
5/2	0	0	2	5	7	0	0	1,64409	3,24283	3,0681
5/2	0	0	2	6	8	0	0	1,60921	3,97585	2,7101
5/2	0	0	2	7	0	0	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2
5/2	0	0	2	8	1	0	0	1,51539	5,46593	1,2603
5/2	0	0	3	5	8	0	0	2,39828	3,18678	3,7352
5/2	0	0	3	6	0	0	0	$3\pi/4$	$5\pi/4$	1
5/2	0	0	3	7	1	0	0	2,30734	4,67398	2,71013
5/2	0	0	3	8	2	0	0	2,23487	5,44457	1,94784
5/2	0	0	4	6	1	0	0	3,09641	3,88491	3,73521
5/2	0	0	4	7	2	0	0	3,04035	4,6391	3,06809
5/2	0	0	4	8	3	0	0	2,95251	5,42507	2,32831
5/2	0	0	5	7	3	0	0	3,77879	4,59879	2,91711
5/2	0	0	5	8	4	0	0	3,674	5,40171	2,22556
5/2	0	0	6	8	5	0	0	4,41134	5,36251	1,691237

Заключение. В данной работе мы рассмотрели координатный анзац Бете на примере ХХХ-модели Гейзенберга (размерность $d = 3$) с четырьмя перевернутыми спинами в спиновой цепочке. С помощью найденных четырех собственных векторов составили уравнение на собственные значения оператора H и в координатном представлении. После накладывания граничных условий и условия периодичности, а также ограничения возможных значений p_1, p_2, p_3 и p_4 привели систему уравнений Бете. Далее, для получения алгебраической формы системы уравнений Бете и возможности его дальнейшего решения, параметризовали данную систему с помощью λ -параметризации. В следствии ряда тривиальных вычислений и введения дополнительных ограничительных условий представили решения системы уравнений Бете ХХХ-цепочки в виде соответствующих спектральных параметров. Используя спектральный параметр выразили полный импульс данного состояния и его энергию. Как частный случай рассмотрено применение к энергии связанного и не связанного состояний. Показано, что энергия связанного состояния меньше чем не связанного. Также рассмотрены цепочки с конечным числом спинов в ней и приведены значения энергии для различных конфигурации перевернутых спинов.

Работа выполнена в рамках финансовой поддержки научно-технической программы (Ф.0811, №0118РК00935) МОН РК.

Список литературы

- 1 Bethe H. Zur Theorie der Metalle. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette // Zeitschrift fur Physik.– 1931. – P. 205-226.
- 2 Byekster R. Exactly solved models in statistical mechanics. Canberra, A. C. T. – London, 1982. – P. 8.
- 3 Heisenberg W. Zur Theorie des Ferromagnetismus // Zeitschrift fur Physik. – 1928. – Vol.49, №9-10. – P. 205-226.
- 4 Shuaibu A., Rahman M.M. Coordinate Bethe ansatz computation for low temperature behavior of a triangular lattice of a spin-1 Heisenberg antiferromagnet // AIP Conference Proceedings – 2014. – Vol.7, №6. – P. 3-12. doi: 10.3842/SIGMA.2011.
- 5 Годен М. Волновая функция Бете. М: Мир. – 1987. – С.305-312.
- 6 Zvonarev M. Notes on Bethe ansatz. [electronic resources] - URL: //http://cmt.harvard.edu/demler/TEACHING/Physics284/Lecture Zvonarev.pdf. (accessed 08.01.2019).
- 7 Vieira R.S., Lima-Santos A. Where are the roots of the Bethe Ansatz equations?// Physics Letters A. – 2015. – Vol.379. №1-2. – P. 1-5. doi: 10.1016/j.physleta.2015.07.016.
- 8 Levkovich-Maslyuk F. Lectures on the Bethe Ansatz. // Mathematical and Theoretical. – 2016. – Vol. 49, №32. doi: 10.1088/1751-8113/49/32/323004
- 9 Evslin J. Anchoring and Binning the Coordinate Bethe Ansatz. [electronic resources] - URL: // https://arxiv.org/pdf/1806.07768.pdf. (accessed 08.01.2019).
- 10 Franchini F. An introduction to integrable techniques for one-dimensional quantum systems. –2017.– - URL: // https://arxiv.org/pdf/1609.02100.pdf. doi: 10.1007/978-3-319-48487-7. (accessed 08.01.2019).
- 11 Franchini F. Notes on Bethe ansatz techniques. - URL: // http://people.sissa.it/franchi/BAnotes.pdf. (accessed 08.01.2019).
- 12 Zabrodin A.V. Bethe ansatz and classical Hirota equations // Theoretical and Mathematical Physics – 1998. – Vol. 116. №1. – P. 54-100. doi: http://doi.org/10.4213/tmf889
- 13 Забродин А.В. Курс лекций Анзац Бете в квантовых интегрируемых системах.// Высшая школа экономики. – 2013. – С. 9-17.
- 14 Slavnov N.A. Algebraic Bethe ansatz // Lekts. Kursy NOC. –2018.– Vol. 27, №1. – P. 3-189. doi: 10.4213/lkn27
- 15 Vlijm R.P. Numerical solutions of the Bethe equations for the isotropic spin-1 chain // Mathematical and Theoretical. – 2012. – Vol. 49(2). - P.165-173. doi: 10.1088/1751-8113/48/49/494003

Н.Т. Суйкимбаева, А.М. Калиев, О.В. Разина, П.Ю. Цыба

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нур-Сұлтан, Қазақстан.

Гейзенбергтің XXX моделіндегі 4-еуі кері аударылған спиндер үшін Бете анзацы

Аңдатпа Анзац Бете тәсілі кванттық интегралданатын жүйелерде, атап айтқанда Гейзенбергтің XXX спин тізбегінің моделіне, төрт аударылған спині бар $d = 3$ өлшемінде қолданылады. Осы тәсілді қолдану шекаралық жағдайларды және кезеңділік шарттарын ескере отырып іске асырылатын болады. Есептің алгебралық түрін алуға және есептің іздестірілетін шешімін алуға мүмкіндік беретін Бете теңдеулерінің жүйесін параметрлеп қолдандық. Бірқатар тривиалды есептеулер мен қосымша шектеу шарттарын енгізу нәтижесінде тиісті спектралды параметрлер түрінде Бете XXX-тізбек теңдеулері жүйесінің шешімдерін ұсындық. Спектралды параметрді пайдалана отырып осы күйдің толық импульсі мен оның энергиясын таптық. Байланысты және байланыссыз жағдайларда энергияны салыстыра отырып, жүйенің байланыссыз жағдайда энергиясы көп екендігі көрсетілген. Сондай-ақ, спин тізбектерінің шектік саны үшін энергия мәндері алынды.

Түйін сөздер: Координаталық анзац Бете, Бете теңдеуі, спиндік тізбек, Гейзенбергтің XXX-моделі, λ -параметрлеу, спектралды параметр, кванттық интегралданатын жүйе, ферромагнетизм.

N.T. Suikimbayeva, A.M. Kaliyev, O.V. Razina, P.Yu. Tsyba

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

The Bethe ansatz in the XXX model of Heisenberg for the 4-inverted spins

Abstract: The Bethe ansatz approach will be applied in quantum integrable systems, namely to the Heisenberg XXX spin chain model, in dimension $d = 3$, with four inverted spins. The application of this approach will be implemented taking into account the boundary conditions and the periodicity condition. Parametrizing the system of Bethe equations, which will provide an algebraic form of writing, and get the desired solution to the problem. As a consequence of a number of trivial calculations and the introduction of additional restrictive conditions, solutions of the system of Bethe XXX-chain equations in the form of corresponding spectral parameters were presented. Using the spectral parameter, we expressed the full momentum of this state and its energy. Comparing the energy at the bound and unbound States, it is shown that at the unbound state the system has the greatest energy. The energy values for a finite number of spins in the spin chain are also obtained.

Keywords: Coordinate Bethe ansatz, Bethe Aequations, spin chain, XXX-Heisenberg model, λ -parametrization, spectral parameter, quantum integrable system, ferromagnetism.

References

- 1 Bethe H. Zur Theorie der Metalle. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkete. Zur Zeitschrift fur Physik, 205-226 (1931).
- 2 Byekster R. Exactly solved models in statistical mechanics. Canberra, A. C. T., 8 (London, 1982).
- 3 Heisenberg W. Zur Theorie des Ferromagnetismus. Zeitschrift fur Physik, 49, 9-10(1928).
- 4 Shuaibu A., Rahman M.M. Coordinate Bethe ansatz computation for low temperature behavior of a triangular lattice of a spin-1 Heisenberg antiferromagnet. AIP Conference Proceedings. 7(6) 3-12(2014). doi: 10.3842/SIGMA.2011.
- 5 Gaudin M. Volnovaya funktsiya Bethe [Bethe wave function], (Mir [World], Moscow, 1987). [in Russian]
- 6 Zvonarev M. Notes on Bethe ansatz. Available at: <http://cmt.harvard.edu/demler/TEACHING/Physics284/LectureZvonarev.pdf>. [in Russian]. (accessed 08.01.2019).
- 7 Vieira R.S., Lima-Santos A. Where are the roots of the Bethe Ansatz equations? Physics Letters A. 379(1-2), 15(2015). doi: 10.1016/j.physleta.2015.07.016.
- 8 Levkovich-Maslyuk F. Lectures on the Bethe Ansatz. Mathematical and Theoretical. 49(32),(2016) doi: 10.1088/1751-8113/49/32/323004.
- 9 Evslin J. Anchoring and Binning the Coordinate Bethe Ansatz. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1609.02100.pdf>. doi: 10.1007/978-3-319-48487-7. (accessed 08.01.2019).
- 10 Franchini F. An introduction to integrable techniques for one-dimensional quantum systems. - 2017. - <https://arxiv.org/pdf/1609.02100.pdf>. doi: 10.1007/978-3-319-48487-7. (accessed 08.01.2019).
- 11 Franchini F. Notes on Bethe ansatz techniques. Available at: <http://people.sissa.it/franchi/BAnotes.pdf>. [in Italy]. (accessed 08.01.2019).
- 12 Zabrodin A.V. Bethe ansatz and classical Hirota equations, Theoretical and Mathematical Physics. -1998.- Vol.116. №1. -P.54-100. doi: <https://doi.org/10.4213/tmf88954-100>.
- 13 Zabrodin A.V. Kurs lektsiy Anzats Bethe v kvantovykh integriruemykh sistemah [A course of lectures on the Bethe Ansatz in quantum integrable systems], Vysshaya shkola ekonomiki [High School of Economics]. (Moscow, 2013, P.9-17). [in Russian]
- 14 Slavnov N.A. Algebraic Bethe ansatz, Lekts. Kursy NOC, 27(1), 3-189(2018). doi: 10.4213/lkn27
- 15 Vlijm R.P. Numerical solutions of the Bethe equations for the isotropic spin-1 chain, Mathematical and Theoretical, 49(2), 165-173(2012). doi: 10.1088/1751-8113/48/49/494003

Сведения об авторах:

Сүйкымбаева Н.Т. – Жалпы және теориялық физика кафедрасының 2-курс докторанты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Калиев А.М. – Жалпы және теориялық физика кафедрасының 2-курс магистранты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Разина О.В. – PhD, Жалпы және теориялық физика кафедрасының доценті, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Цыба П.Ю. – PhD, Жалпы және теориялық физика кафедрасының доценті, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Suikimbayeva N.T. – Doctoral Student of the Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Kaliyev A.M. – Master Student of the Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Razina O.V. – PhD, Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Razina Ol.V. – PhD, Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Tsyba P.Y. – PhD, Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 19.02.2019

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы. Физика. Астрономия сериясы»
журналында мақала жариялау ережесі

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. **Журнал мақсаты.** Физика мен астрономия салаларының теориялық және эксперименталды зерттелулері бойынша мұқият тексеруден өткен ғылыми құндылығы бар мақалалар жариялау.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқа) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды *bulphysast.enu.kz* журнал сайтынан жүктеп алуға болады. Сонымен қатар, автор(лар) ілеспе хат ұсынуы керек.

3. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақаланың Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысында басуға келісімін, шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді. Автор мақаланы редакцияға жіберу арқылы автор туралы мәліметтің дұрыстығына, мақала көшірілмегендігіне (плагиаттың жоқтығына) және басқа да заңсыз көшірмелердің жоқтығына кепілдеме береді.

4. Мақаланың көлемі 18 беттен аспауға тиіс (6 беттен бастап).

ГТАМРК <http://grnti.ru/>

Автор(лар)дың аты-жөні

Мекеменің толық атауы, қаласы, мемлекеті (егер авторлар әртүрлі мекемеде жұмыс жасайтын болса, онда әр автор мен оның жұмыс мекемесі қасында бірдей белгі қойылу керек)

Автор(лар)дың E-mail-ы

Мақала атауы

Аңдатпа (100-200 сөз; күрделі формулаларсүзсіз, мақаланың атауын мейлінше қайталамауы қажет; әдебиеттерге сілтемелер болмауы қажет; мақаланың құрылысын (кіріспе мақаланың мақсаты/ міндеттері /қарастырылып отырған сұрақтың тарихы /зерттеу /әдістері нәтижелер/талқылау, қорытынды) сақтай отырып, мақаланың қысқаша мазмұны берілуі қажет).

Түйін сөздер (6-8 сөз не сөз тіркесі. Түйін сөздер мақала мазмұнын көрсетіп, мейлінше мақала атауы мен аннотациядағы сөздерді қайталамай, мақала мазмұнындағы сөздерді қолдану қажет. Сонымен қатар, ақпараттық-ізвестіру жүйелерінде мақаланы жеңіл табуға мүмкіндік беретін ғылым салаларының терминдерін қолдану қажет).

Негізгі мәтін мақаланың мақсаты/ міндеттері/ қарастырылып отырған сұрақтың тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер/талқылау, қорытынды бөлімдерін қамтуы қажет.

5. **Таблица, суреттер** – Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

Мақаладағы **формулалар** тек мәтінде оларға сілтеме берілсе ғана номерленеді.

Жалпы қолданыста бар **аббревиатуралар** мен **қысқартулардан** басқалары міндетті түрде алғаш қолданғанда түсіндірілуі берілуі қажет. **Қаржылай көмек туралы** ақпарат бірінші бетте көрсетіледі.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тұйым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: қараңыз [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамандағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографиялық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. Редакцияға түскен мақала жабық (анонимді) тексеруге жіберіледі. Барлық рецензиялар авторларға жіберіледі. Автор (рецензент мақаланы түзетуге ұсыныс берген жағдайда) үш күн аралығында қайта қарап, қолжазбаның түзетілген нұсқасын редакцияға қайта жіберуі керек. Рецензент жарамсыз деп таныған мақала қайтара қарастырылмайды. Мақаланың түзетілген нұсқасы мен автордың рецензентке жауабы редакцияға жіберіледі.

9. Төлемақы. Басылымға рұқсат етілген мақала авторларына төлем жасау туралы ескертіледі. Төлем көлемі 2018 жылы 4500 тенге – ЕҰУ қызметкерлері үшін және 5500 тенге басқа ұйым қызметкерлеріне.

Реквизиты:

1)РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Банк ЦентрКредит"

БИК банка: KСJBKZKX

ИИК: KZ978562203105747338

Кбе 16

Кпн 859- за статью

2)РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК АО "Bank RBK"

Бик банка: KINCKZKA

ИИК: KZ498210439858161073

Кбе 16

Кпн 859 - за статью

3)РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК АО "ForteBank"

БИК Банка: IRTYKZKA

ИИК: KZ599650000040502847

Кбе 16

Кпн 859 - за статью

4)РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК АО "Народный Банк Казахстан"

БИК Банка: HSBKKZKX

ИИК: KZ946010111000382181

Кбе 16

Кпн 859.

"За публикацию в Вестнике ЕНУ ФИО автора"

Provision on articles submitted to the journal "Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Physics. Astronomy series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Purpose of the journal. Publication of carefully selected original scientific.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website bulphysast.enu.kz. And you also need to provide the cover letter of the author(s).

Language of publications: Kazakh, Russian, English.

3. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language. Submitting the text of the work for publication in the journal, the author guarantees the correctness of all information about himself, the lack of plagiarism and other forms of improper borrowing in the article, the proper formulation of all borrowings of text, tables, diagrams, illustrations.

4. The volume of the article should not exceed 18 pages (from 6 pages).

5. Structure of the article

GRNTI <http://grnti.ru/>

Initials and Surname of the author (s)

Full name of the organization, city, country (if the authors work in different organizations, you need to put the same icon next to the name of the author and the corresponding organization)

Author's e-mail (s)

Article title

Abstract (100-200 words, it should not contain a big formulas, the article title should not repeat in the content, it should not contain bibliographic references, it should reflect the summary of the article, preserving the structure of the article - introduction/ problem statement/ goals/ history, research methods, results /discussion, conclusion).

Key words (6-8 words/word combination. Keywords should reflect the main content of the article, use terms from the article, as well as terms that define the subject area and include other important concepts that make it easier and more convenient to find the article using the information retrieval system).

The main text of the article should contain an introduction/ problem statement/ goals/ history, research methods, results / discussion, conclusion. Tables, figures should be placed after the mention. Each illustration should be followed by an inscription. Figures should be clear, clean, not scanned.

Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

In the article, only those **formulas** are numbered, to which the text has references.

All **abbreviations**, with the exception of those known to be generally known, must be deciphered when first used in the text.

Information on **the financial** support of the article is indicated on the first page in the form of a footnote.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "... , see [3, § 7, Lemma 6]"; "... , see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. Work with electronic proofreading. Articles received by the Department of Scientific Publications (editorial office) are sent to anonymous review. All reviews of the article are sent to the author. The authors must send the proof of the article within three days. Articles that receive a negative review for a second review are not accepted. Corrected versions of articles and the author's response to the reviewer are sent to the editorial office. Articles that have positive reviews are submitted to the editorial board's of the journal for discussion and approval for publication.

Periodicity of the journal: 4 times a year.

9. Payment. Authors who have received a positive conclusion for publication should make payment on the following requisites (for ENU employees - 4,500 tenge, for outside organizations - 5,500 tenge):

Реквизиты:

1) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Банк ЦентрКредит"

БИК банка: КСJBKZKX

ИИК: KZ978562203105747338

Кбе 16

Кпн 859- за статью

2) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК АО "Bank RBK"

Бик банка: KINCKZKA

ИИК: KZ498210439858161073

Кбе 16

Кпн 859 - за статью

3) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК АО "ForteBank"

БИК Банка: IRTYKZKA

ИИК: KZ599650000040502847

Кбе 16

Кпн 859 - за статью

4) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК АО "Народный Банк Казахстан"

БИК Банка: HSBKZKX

ИИК: KZ946010111000382181

Кбе 16

Кпн 859.

"За публикацию в Вестнике ЕНУ ФИО автора"

Положение о рукописях, представляемых в журнал «Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия: Физика. Астрономия»

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. **Цель журнала.** Публикация тщательно отобранных оригинальных научных работ по актуальным проблемам теоретических и экспериментальных исследований в области физики и астрономии.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulphysast.enu.kz*. Автору (авторам) необходимо предоставить сопроводительное письмо.

Язык публикаций: казахский, русский, английский.

3. Отправление статей в редакцию означает согласие авторов на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статей в журнале и переиздания их на любом иностранном языке. Представляя текст работы для публикации в журнале, автор гарантирует правильность всех сведений о себе, отсутствие плагиата и других форм неправомерного заимствования в рукописи, надлежащее оформление всех заимствований текста, таблиц, схем, иллюстраций.

4. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц).

5. **Схема построения статьи**

ГРНТИ <http://grnti.ru/>

Инициалы и фамилия автора(ов)

Полное наименование организации, город, страна (если авторы работают в разных организациях, необходимо поставить одинаковый значок около фамилии автора и соответствующей организации)

E-mail автора(ов)

Название статьи

Аннотация (100-200 слов; не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию повторять название статьи; не должна содержать библиографические ссылки; должна отражать краткое содержание статьи, сохраняя структуру статьи – введение/ постановка задачи/ цели/ история, методы исследования, результаты/обсуждение, заключение/выводы).

Ключевые слова (6-8 слов/словосочетаний). Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, позволяющие облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы).

Основной текст статьи должен содержать введение/ постановку задачи/ цели/ историю, методы исследования, результаты/обсуждение, заключение/выводы.

Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

В статье нумеруются лишь те **формулы**, на которые по тексту есть ссылки.

Все **аббревиатуры и сокращения**, за исключением заведомо общеизвестных, должны быть расшифрованы при первом употреблении в тексте.

Сведения о **финансовой поддержке** работы указываются на первой странице в виде сноски.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semi.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. Работа с электронной корректурой. Статьи, поступившие в Отдел научных изданий (редакция), отправляются на анонимное рецензирование. Все рецензии по статьям отправляются автору. Авторам в течение трех дней необходимо отправить корректуру статьи. Статьи, получившие отрицательную рецензию, к повторному рассмотрению не принимаются. Исправленные варианты статей и ответ автора рецензенту присылаются в редакцию. Статьи, имеющие положительные рецензии, представляются редколлегии журнала для обсуждения и утверждения для публикации.

Периодичность журнала: 4 раза в год.

9. Оплата. Авторам, получившим положительное заключение к опубликованию, необходимо произвести оплату по следующим реквизитам (для сотрудников ЕНУ – 4500 тенге, для сторонних организаций – 5500 тенге): Реквизиты:

Реквизиты:

1) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Банк ЦентрКредит"

БИК банка: KСJBKZKX

ИИК: KZ978562203105747338

Кбе 16

Кпн 859- за статью

2) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК АО "Bank RBK"

Бик банка: KINCKZKA

ИИК: KZ498210439858161073

Кбе 16

Кпн 859 - за статью

3) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК АО "ForteBank"

БИК Банка: IRTYKZKA

ИИК: KZ599650000040502847

Кбе 16

Кпн 859 - за статью

4) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК АО "Народный Банк Казахстан"

БИК Банка: HSBKKZKX

ИИК: KZ946010111000382181

Кбе 16

Кпн 859.

"За публикацию в Вестнике ЕНУ ФИО автора"

Мақаланы рәсімдеу үлгісі

МРНТИ 27.25.19

А.Ж. Жубанышева¹, Н. Темиргалиев², А.Б. Утесов³

¹ *Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

² *Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова, Актюбе, Казахстан*

(Email: ¹ *axaulezh@mail.ru*, ² *ntmath10@mail.ru*, ³ *adilzhan_71@mail.ru*)

Численное дифференцирование функций в контексте Компьютерного (вычислительного) перечника

Введение

Текст введения...

Авторам не следует использовать нестандартные пакеты LaTeX (используйте их лишь в случае крайней необходимости)

Заголовок секции

1.1 Заголовок подсекции

Окружения.

Теорема 1. ...

Лемма 1. ...

Предложение 1. ...

Определение 1. ...

Следствие 1. ...

Замечание 1. ...

Теорема 2 (Темиргалиев Н. [2]). *Текст теоремы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Текст доказательства.

2. Формулы, таблицы, рисунки

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; D_N)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N \left(\varepsilon_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N \right) \right)_Y, \quad (28)$$

где $\delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv$

$$\equiv \sup_{f \in F} \left\| Tf(\cdot) - \varphi_N \left(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N^{(N)}; \cdot \right) \right\|_Y.$$

$$|\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 (\tau=1, \dots, N)$$

Таблицы, рисунки необходимо располагать после упоминания. С каждой иллюстрацией должна следовать надпись.

Таблица 3 – Название таблицы

Простые	Не простые
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29	4, 6, 8, 9, 10, 12, 14

3. Ссылки и библиография

Для ссылок на утверждения, формулы и т. п. можно использовать метки. Например, теорема 2, Формула (28)

Для руководства по L^AT_EX и в качестве примера оформления ссылок, см., например, *Львовский С.М.* Набор и верстка в пакете L^AT_EX. Москва: Космосинформ, 1994.

Список литературы оформляется следующим образом.



Рисунок 1 – Название рисунка

Список литературы

- 1 Локуциевский О.М., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. –М.: ТОО "Янус", 1995. –581 с. - **книга**
- 2 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник как синтез известного и нового в численном анализе // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева –2014. –Т.4. №101. –С. 16-33. doi: ... (при наличии) - **статья**
- 3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. - **труды конференций**
- 4 Курмуков А.А. Ангиопротекторная и гипополипидемическая активность леукомизина. –Алматы: Бастау, 2007. –С. 3-5 - **газетные статьи**
- 5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

А.Ж. Жубанышева¹, Н. Темиргалиев¹, А.Б. Утесов²

¹ Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Астана, Қазақстан

² Қ.Жубанов атындағы. Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнінде функцияларды сандық дифференциалдау

Аннотация: Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнінде Соболев класында жататын функцияларды олардың тригонометриялық Фурье-Лебега коэффициенттерінің ақырлы жиынынан алынған дәл емес ақпарат бойынша жуықтау есебі толығымен шешілді [100-200 сөздер].

Түйін сөздер: жуықтап дифференциалдау, дәл емес ақпарат бойынша жуықтау, шектік қателік, Компьютерлік (есептеуіш) диаметр [6-8 сөз/сөз тіркестері].

A.Zh.Zhubanysheva¹, N. Temirgaliyev¹, A.B. Utesov²

¹ Institute of theoretical mathematics and scientific computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

² K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan

Numerical differentiation of functions in the context of Computational (numerical) diameter

Abstract: The computational (numerical) diameter is used to completely solve the problem of approximate differentiation of a function given inexact information in the form of an arbitrary finite set of trigonometric Fourier coefficients. [100-200 words]

Keywords: approximate differentiation, recovery from inexact information, limiting error, computational (numerical) diameter, massive limiting error. [6-8 words/word combinations]

References

- 1 Lokucievskij O.M., Gavrikov M.B. Nachala chislenno go analiza [Elements of numerical analysis] (Yanus, Moscow, 1995). [in Russian]
- 2 Temirgaliyev N. Komp'yuternyj (vychislitel'nyj) poperechnik kak sintez izvestnogo i novogo v chislenno m analize [Computational (numerical) diameter as a synthesis of the known and the new in numerical analysis], Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta imeni L.N. Gumileva [Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University], 4 (101), 16-33 (2014). [in Russian]
- 3 Zhubanysheva A.Zh., AbikenovaSh.K. O normah proizvodnyh funkciy s nulevymi znachenijami zadannogo nabora linejnyh funkcionalov i ih primenenija k poperechnikovym zadacham [About the norms of the derivatives of functions with zero values of a given set of linear functionals and their application to the width problems]. Tezisy dokladov Mezhdunarodnoj konferencii, posvjashhennaja 110-letiju so dnja rozhdenija akademika S.M.Nikol'skogo "Funkcional'nye prostranstva i teorija priblizhenija funkciy" [International conference on Function Spaces and Approximation Theory dedicated to the 110th anniversary of S. M. Nikol'skii]. Moscow, 2015, pp. 141-142. [in Russian]

- 4 Kurmukov A. A. Angioprotekturnaja i gipolipidemicheskaaja aktivnost' leukomizina [Angioprotective and lipid-lowering activity of leukomycin] (Bastau, Almaty, 2007, P. 3-5). [in Russian]
- 5 Куров В.А., Мижличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии [The analytic method of embedding symplectic geometry], Cibirskie jelektronnye matematicheskie izvestija [Siberian Electronic Mathematical Reports], **14**, 657-672 (2017). doi: 10.17377/semi.2017.14.057. Available at: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. [in Russian]. (accessed 08.01.2017).

Сведения об авторах:

Жубанышева А.Ж. - старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, Казахстан.

Темиргалиев Н. - директор Института теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, Казахстан.

Утесов А.Б. - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова, пр. А.Молдагуловой, 34, Актюбе, Казахстан.

Zhubanysheva A.Zh. - Senior researcher of the Institute of theoretical mathematics and scientific computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., Astana, Kazakhstan.

Temirgaliyev N. - Head of the Institute of theoretical mathematics and scientific computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., Astana, Kazakhstan.

Utesov A.B. - candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, K.Zhubanov Aktobe Regional State University, A.Moldagulova Prospect, 34, Aktobe, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 15.05.2017

Редакторы: А.Қ. Арынгазин
Шығарушы редактор, дизайн: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
Хабаршысы. Физика. Астрономия сериясы.
-2019 - 2(127) - Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 100-б.
Шартты б.т. - 9,375 Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді.

Редакция мекен-жайы: 010008, Нұр-Сұлтан: қ.,
Сәтбаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00(ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды